線性代數公式手冊

線性代數

公式手冊

研究所電機、通訊、資工專用

EBRA LINEAR ALGEBRA LINEAR ALGEBRA LINEAR ALGEBRA LINEAR ALGEB

喻超凡 編著

喻超凡 博士
喻超弘 老師 編著
喻　婕 老師

EBRA LINEAR ALGEBRA LINEAR ALGEBRA LINEAR ALGEBRA LINEAR ALGEB

喻超凡數位企業有限公司
https://www.superyu.idv.tw

第 5 章 矩陣重要的性質

5.1 矩陣的 rank

1. 設 E 為 $m \times m$ 的基本矩陣，且 A 為 $m \times n$ 的矩陣，則 $\textbf{rank}\,(EA) = \textbf{rank}\,(A)$ 。
(矩陣做基本列行運算, 其 rank 不變)

2. $\textbf{rank}\,(A) = \textbf{rank}\,(A^*)$

3. $\textbf{rank}\,(A^*A) = \textbf{rank}\,(AA^*) = \textbf{rank}\,(A)$

4. 若 $\textbf{rank}\,(P_{k\times m}) = m$，即 $P_{k\times m}$ 為行滿秩 (行獨立)，則 $\textbf{rank}\,(P_{k\times m}A_{m\times n}) = \textbf{rank}\,(A)$

5. 若 $\textbf{rank}\,(Q_{n\times \ell}) = n$，即 $Q_{n\times \ell}$ 為列滿秩 (列獨立)，則 $\textbf{rank}\,(A_{m\times n}Q_{n\times \ell}) = \textbf{rank}\,(A)$

6. 設 A、B 為 $n \times n$ 的方陣

   (a) 若 B 為可逆，則 $\textbf{rank}\,(AB) = \textbf{rank}\,(BA) = \textbf{rank}\,(A)$
   (b) 若 A 為可逆，則 $\textbf{rank}\,(AB) = \textbf{rank}\,(BA) = \textbf{rank}\,(B)$
   (c) 若 A、B 均不可逆，則 $\textbf{rank}\,(AB)$、$\textbf{rank}\,(BA)$ 不一定相等。

7. 若 P 為行滿秩 (行獨立)，則 P 有左反矩陣，且 $P^+ = (P^*P)^{-1}P^*$ 。

8. 若 Q 為列滿秩 (列獨立)，則 Q 有右反矩陣，且 $Q^+ = Q^*(QQ^*)^{-1}$ 。

9. $\textbf{rank}\,(AB) \le \min\{\textbf{rank}\,(A), \textbf{rank}\,(B)\}$ (矩陣的 rank 越乘越小) 。

10. $\mathbf{R}\,(AB) \subseteq \mathbf{R}\,(A)$ (行空間看前面的矩陣)，若 B 為列滿秩 (列獨立)，
則 $\textbf{rank}\,(AB) = \textbf{rank}\,(A)$，故 $\mathbf{R}\,(AB) = \mathbf{R}\,(A)$ 。

11. $\mathbf{RS}\,(AB) \subseteq \mathbf{RS}\,(B)$ (列空間看後面的矩陣)，若 A 為行滿秩 (行獨立)，
則 $\textbf{rank}\,(AB) = \textbf{rank}\,(B)$，故 $\mathbf{RS}\,(AB) = \mathbf{RS}\,(B)$ 。

12. $\mathbf{N}\,(AB) \supseteq \mathbf{N}\,(B)$ (Kernel 看後面的矩陣)，若 A 為行滿秩 (行獨立)，
則 $\textbf{rank}\,(AB) = \textbf{rank}\,(B)$，即 $\textbf{nullity}\,(AB) = \textbf{nullity}\,(B)$，
故 $\mathbf{N}\,(AB) = \mathbf{N}\,(B)$ 。

13. $\textbf{rank}\,(A^*A) = \textbf{rank}\,(A)$；故 $\mathbf{N}\,(A^*A) = \mathbf{N}\,(A)$、$\mathbf{R}\,(A^*A) = \mathbf{R}\,(A^*)$，
但 $\mathbf{R}\,(A^*A)$ 不一定等於 $\mathbf{R}\,(A)$、$\mathbf{N}\,(A^*A)$ 不一定等於 $\mathbf{N}\,(A^*)$ 。

14. $\textbf{rank}\,(AA^*) = \textbf{rank}\,(A^*) = \textbf{rank}\,(A)$；故 $\mathbf{N}\,(AA^*) = \mathbf{N}\,(A^*)$、$\mathbf{R}\,(AA^*) = \mathbf{R}\,(A)$，
但 $\mathbf{R}\,(AA^*)$ 不一定等於 $\mathbf{R}\,(A^*)$、$\mathbf{N}\,(AA^*)$ 不一定等於 $\mathbf{N}\,(A)$ 。

(d) 設線性變換 $T: M_{n\times n}(\mathbb{R}) \to M_{n\times n}(\mathbb{R})$ 爲

$$T(A) = \frac{A + A^T}{2} \;;\; \forall A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$$

則 $\mathbf{Ker}\,(T) = W_2$ (反對稱矩陣)、$\mathbf{R}\,(T) = W_1$ (對稱矩陣) , 且

$$\mathbf{nullity}\,(T) = \frac{n(n-1)}{2} \quad , \quad \mathbf{rank}\,(T) = \frac{n(n+1)}{2}$$

同時 T 的特徵值爲 $\lambda = 0$、$\lambda = 1$, 其中

i. $\lambda = 0$ 重根 $\dfrac{n(n-1)}{2}$ 次, 對應的特徵空間爲 W_2 (反對稱矩陣)。

ii. $\lambda = 1$ 重根 $\dfrac{n(n+1)}{2}$ 次 , 對應的特徵空間爲 W_1 (對稱矩陣)。

Note : 若 $\mathbb{R}$ 改爲 $\mathbb{C}$ 時 , 上面性質中的轉置 (T) 改成共軛轉置 $(*)$ 即可 。

5.5.2 A^TA 、AA^T

設 $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, 即 A 爲實數 $m \times n$ 的矩陣 , 令

$$A = [\boldsymbol{c}_1 \quad \boldsymbol{c}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{c}_n]$$

其中 $\boldsymbol{c}_1$ 、$\boldsymbol{c}_2$ 、$\cdots$ 、$\boldsymbol{c}_n$ 爲 A 的行向量 , 則

$$A^TA = \begin{bmatrix} \boldsymbol{c}_1^T \\ \boldsymbol{c}_2^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{c}_n^T \end{bmatrix} [\boldsymbol{c}_1 \quad \boldsymbol{c}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{c}_n] = \begin{bmatrix} \boldsymbol{c}_1^T\boldsymbol{c}_1 & \boldsymbol{c}_1^T\boldsymbol{c}_2 & \cdots & \boldsymbol{c}_1^T\boldsymbol{c}_n \\ \boldsymbol{c}_2^T\boldsymbol{c}_1 & \boldsymbol{c}_2^T\boldsymbol{c}_2 & \cdots & \boldsymbol{c}_2^T\boldsymbol{c}_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \boldsymbol{c}_n^T\boldsymbol{c}_1 & \boldsymbol{c}_n^T\boldsymbol{c}_2 & \cdots & \boldsymbol{c}_n^T\boldsymbol{c}_n \end{bmatrix}_{n\times n}$$

即 $(A^TA)_{ij} = \boldsymbol{c}_i^T\boldsymbol{c}_j =< \boldsymbol{c}_i\,,\,\boldsymbol{c}_j >$, 同理令

$$A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{r}_1 \\ \boldsymbol{r}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{r}_m \end{bmatrix}$$

其中 $\boldsymbol{r}_1$ 、$\boldsymbol{r}_2$ 、$\cdots$ 、$\boldsymbol{r}_m$ 爲 A 的列向量 , 則

$$AA^T = \begin{bmatrix} \boldsymbol{r}_1 \\ \boldsymbol{r}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{r}_m \end{bmatrix} [\,\boldsymbol{r}_1^T \quad \boldsymbol{r}_2^T \quad \cdots \quad \boldsymbol{r}_m^T\,] = \begin{bmatrix} \boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_1^T & \boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_2^T & \cdots & \boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_m^T \\ \boldsymbol{r}_2\boldsymbol{r}_1^T & \boldsymbol{r}_2\boldsymbol{r}_2^T & \cdots & \boldsymbol{r}_2\boldsymbol{r}_m^T \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \boldsymbol{r}_m\boldsymbol{r}_1^T & \boldsymbol{r}_m\boldsymbol{r}_2^T & \cdots & \boldsymbol{r}_m\boldsymbol{r}_m^T \end{bmatrix}_{m\times m}$$

即 $(AA^T)_{ij} = \boldsymbol{r}_i\boldsymbol{r}_j^T =< \boldsymbol{r}_i\,,\,\boldsymbol{r}_j >$

1. A 的行向量 $\{\boldsymbol{c}_1\,,\,\boldsymbol{c}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{c}_n\}$ 爲 orthonormal set, 若且唯若 $A^TA = I_n$