

# 序

線性代數及機率這兩門學科, 對許多電機類的同學而言, 幾乎都是心中的夢魘, 爲什麼會這樣呢? 主要的原因就是, 這兩門學科的公設、定義、定理及符號太多且太繁, 導致許多同學無法有效的去理解及學習。因此 **喻超凡數學工作室**, 集多位博士級的資深線性代數及機率的老師, 將他們在各大補習班及學校任教數十年的精華, 及配合全國各大名校 (台、清、交、成 ...) 研究所考試所須用到的線性代數及機率的公式, 精、準且有條理的彙整出一本線性代數及機率的殺手級密技, 以作爲同學在考試前自修及考試當天衝刺必備的葵花寶典。

本書手稿雖經多次修定及校對, 但仍難免有所疏漏之處, 敬請各位老師和同學不吝賜教。本書已獲全國各大補習班採用爲輔助教材, 筆者在此致最大的謝意。同時喻超凡數學工作室亦將多年之工程數學歷試詳解置於網站中, 供同學下載參考, 網址爲 <http://www.superyu.idv.tw> 歡迎同學上網參觀指教。

喻超凡

2013. 4.

# 目錄

<b>I 線性代數</b>	<b>1</b>
<b>1 矩陣概論</b>	<b>3</b>
1.1 矩陣的定義及基本運算	3
1.1.1 基本定義	3
1.1.2 基本運算	5
1.1.3 其他特殊矩陣的定義	9
1.2 行列式 (Determinant) 及其應用	14
1.2.1 行列式的定義	14
1.2.2 行列式的性質	14
1.2.3 反矩陣的求法	17
1.3 矩陣的秩 (Rank) 及聯立方程式的解	19
<b>2 向量空間</b>	<b>21</b>
2.1 一般代數結構	21
2.2 向量空間	22
2.3 子空間	24
2.3.1 概論	24
2.3.2 生成空間 (Spanning)	26
2.3.3 直和 (Direct sum)	26
2.3.4 矩陣的列空間、行空間、零核空間	27
2.4 向量空間的基底	28
2.4.1 線性獨立與線性相依	28
2.4.2 基底與維數	29
<b>3 線性變換</b>	<b>31</b>

3.1	概論 . . . . .	31
3.2	線性變換的矩陣表示法 . . . . .	33
3.2.1	概論 . . . . .	33
3.2.2	合成變換 . . . . .	35
3.2.3	左乘變換 . . . . .	36
3.2.4	逆變換與同構變換 . . . . .	36
3.2.5	基底轉換 . . . . .	37
<b>4</b>	<b>相似轉換</b>	<b>39</b>
4.1	特徵值系統 . . . . .	39
4.2	對角化 . . . . .	42
4.3	Jordan Canonical form . . . . .	44
4.4	矩陣相似轉換之應用 . . . . .	46
4.4.1	解方陣函數 . . . . .	46
4.4.2	利用Jordan form 求方陣函數 . . . . .	48
4.4.3	解一階齊次常係數聯立 O.D.E. . . . .	49
4.4.4	解二階齊次常係數聯立 O.D.E. . . . .	50
4.4.5	解非齊次常係數聯立 O.D.E. . . . .	50
4.4.6	解方陣方程式 . . . . .	52
4.5	不變子空間 . . . . .	53
4.5.1	Cayley-Hamilton 定理 . . . . .	53
4.5.2	最小多項式 . . . . .	55
4.5.3	Sylvester Identity . . . . .	56
<b>5</b>	<b>內積空間</b>	<b>57</b>
5.1	概論 . . . . .	57
5.1.1	內積 . . . . .	57
5.1.2	範數(norm) 及 Gram-Schmidt 正交化 . . . . .	58
5.1.3	正交投影 . . . . .	60
5.1.4	最小二乘方 . . . . .	62
5.2	伴隨(Adjoint) 運算子 . . . . .	62
5.2.1	概論 . . . . .	62
5.2.2	正規(normal) 及自我伴隨 (self-adjoint) 運算子 . . . . .	63
5.2.3	么正(unitary) 及正交 (orthogonal) 運算子 . . . . .	64

5.3	二次式 (Quadratic form)	66
5.4	常見的分解(decomposition)	68
5.4.1	LU分解 (LU decomposition)	68
5.4.2	QR分解 (QR decomposition)	69
5.4.3	矩陣的 Singular value decomposition	70
5.4.4	Full rank Decomposition	72
5.4.5	方陣的極分解(Polar decomposition)	72
5.4.6	廣義反矩陣	73
<b>II 機率</b>		<b>75</b>
<b>1</b>	<b>基礎數學</b>	<b>77</b>
1.1	集合(Set)	77
1.2	排列(Permutation)	80
1.3	組合(Combinations)	81
1.4	Taylor級數與 Maclaurin 級數	82
1.5	Gamma、Beta 函數	83
1.6	基本微積分	83
<b>2</b>	<b>機率空間 (probability space)</b>	<b>85</b>
2.1	概論	85
2.2	條件機率(Conditional Probability)	88
2.3	獨立性(Independence)	90
<b>3</b>	<b>離散型隨機變數</b>	<b>91</b>
3.1	定義	91
3.2	基本性質	92
3.2.1	累積分配函數(c.d.f)	92
3.2.2	期望值(Expected Value) 與變異數 (Variance)	93
3.2.3	特徵函數與動差生成函數	94
3.2.4	隨機變數的函數變換	95
3.3	常見一維離散型的隨機變數	95
3.3.1	Bernoulli 分配	95
3.3.2	二項分配(Binomial Distribution)	96

3.3.3	負二項分配(Negative Binomial Distribution)	96
3.3.4	幾何分配(Geometric Distribution)	97
3.3.5	超幾何分配(Hypergeometric Distribution)	97
3.3.6	Poisson 分配	98
<b>4</b>	<b>連續型隨機變數</b>	<b>99</b>
4.1	定義	99
4.2	基本性質	99
4.2.1	期望值與變異數	99
4.2.2	隨機變數的函數變換	100
4.3	常見一維連續型隨機變數	101
4.3.1	常態分配或Gaussian 分配 (Normal or Gaussian Distribution)	101
4.3.2	均勻分配(Uniform Distribution)	102
4.3.3	指數分配(Exponential Distribution)	102
4.3.4	Gamma分配	103
4.3.5	Beta分配	104
4.3.6	卡方分配(Chi-square Distribution)	104
<b>5</b>	<b>多維隨機變數</b>	<b>105</b>
5.1	定義	105
5.2	邊際分配函數(Marginal Probability Function)	106
5.2.1	定義	106
5.2.2	條件分佈(Conditional Distributions)	108
5.2.3	獨立隨機變數(Independent Random Variables)	109
5.3	二維隨機變數的函數變換	110
5.4	順序統計量(Order Statistics)	113
5.5	期望值及其性質	114
5.5.1	期望值	114
5.5.2	共變異數(Covariance)、相關係數 (Correlations Coefficient)	115
5.5.3	條件期望值(Conditional Expectation)	117
<b>6</b>	<b>極限定理</b>	<b>119</b>
6.1	Chebyshev's 不等式 (Chebyshev's Inequality)	119
6.2	大數定律(The Law of Large Numbers)	119
6.3	中央極限定理(The Central Limit Theorem)	120

# Part I

## 線性代數

# 第 1 章 矩陣概論

## 1.1 矩陣的定義及基本運算

### 1.1.1 基本定義

1. 列矩陣 (Row matrix)

$$A_{1 \times n} = [a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n]_{1 \times n}$$

2. 行矩陣 (Column matrix)

$$A_{n \times 1} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}_{n \times 1}$$

3. 方形矩陣 (Square matrix)

$$A_{n \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n \times n}$$

4. 上三角矩陣 (Upper triangular matrix)

$$U_{n \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n \times n}$$

5. 下三角矩陣 (Lower triangular matrix)

$$L_{n \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n \times n}$$

## 6. 對角線矩陣 (Diagonal matrix)

$$D_{n \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n \times n}$$

## 7. 零矩陣 (Null matrix)

$$N_{m \times n} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{m \times n}$$

## 8. 子矩陣 (Sub-matrix)

例如： $A_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & 0 \end{bmatrix}$ ，則  $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ 、 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ 、 $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$  …，稱為子矩陣。

## 9. 主子矩陣 (Principle sub-matrix)

對角線元素為原矩陣對角線元素之子矩陣稱為矩陣的主子矩陣。

例如： $A_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & 0 \end{bmatrix}$ ，則  $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ 、 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ 、 $\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$  …，稱為主子矩陣。

## 10. 列梯形矩陣 (echelon matrix)

若矩陣  $A$  中，列的第一個非零元素以前零的元素數目呈逐列增加，直到只剩下全為零的列為止，則此矩陣稱為列梯形矩陣。同時每列中第一個非為零的元素，稱為列梯形矩陣  $A$  的區別元素 (distinguished element or pivot)。

## 11. 最簡列梯形矩陣 (row reduced echelon matrix)

若列梯形矩陣其區別元素滿足下面的性質時，則該列梯形矩陣稱為最簡列梯形矩陣。

(1) 每一個區別元素是他們所在的行中唯一的非零元素。

(2) 每一個區別元素皆為 1。



### 1.1.2 基本運算

#### 1. 相等 (equal):

設  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ 、 $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ ，若  $A = B$  則  $\forall a_{ij} = b_{ij}$ 。

#### 2. 相加 (add):

##### (1) 定義:

設  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ 、 $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ 、 $C = [c_{ij}]_{m \times n}$ ，若  $A + B = C$  則  $\forall c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ 。

##### (2) 性質: 設 $A$ 、 $B$ 均為 $m \times n$ 的矩陣

(a)  $A + B = B + A$

(b)  $(A + B) + C = A + (B + C)$

(c)  $A + (-A) = 0$ ，其中  $0$  為  $m \times n$  的  $0$  矩陣。

(d)  $A + 0 = A$ ，其中  $0$  為  $m \times n$  的  $0$  矩陣。

#### 3. 相乘 (multiple):

##### (1) 純量與矩陣相乘

設  $A_{m \times n} = [a_{ij}]$  且  $\alpha$  為純量，則  $\alpha A = [\alpha a_{ij}]$ ，即  $A$  中每一個元素均乘上  $\alpha$ 。

##### (2) 二矩陣相乘

設  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ 、 $B = [b_{ij}]_{n \times p}$ ，則  $A \times B = C = [c_{ij}]_{m \times p}$ ，其中

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \quad ; \quad \begin{cases} i = 1, 2, \dots, m \\ j = 1, 2, \dots, p \end{cases}$$

##### (3) 分割矩陣的乘法

##### (a) 設矩陣為

$$A_{m \times n} = [A_1 \quad A_2 \quad \dots \quad A_n]$$

其中  $A_i$  表示矩陣  $A$  第  $i$  行的行向量, 且

$$X_{n \times 1} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

則

$$AX = x_1A_1 + x_2A_2 + \cdots + x_nA_n$$

(b) 設矩陣為

$$A_{m \times n} = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix}$$

其中  $A_i$  表示矩陣  $A$  第  $i$  列的列向量, 且

$$X_{1 \times m} = [x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_m]$$

則

$$XA = x_1A_1 + x_2A_2 + \cdots + x_mA_m$$

(c) 設矩陣  $A$ 、 $B$  可表示成

$$A_{m \times p} = \left[ \begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array} \right] \quad , \quad B_{p \times n} = \left[ \begin{array}{c|c} B_{11} & B_{12} \\ \hline B_{21} & B_{22} \end{array} \right]$$

其中  $A_{ij}$ 、 $B_{ij}$  為  $A$  及  $B$  的分割矩陣, 且矩陣相乘的部分均成立時, 則

$$AB = \left[ \begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c|c} B_{11} & B_{12} \\ \hline B_{21} & B_{22} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cc} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{array} \right]$$

(4) 性質:

(a)  $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$ 。

(b)  $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$ 。

(c)  $A \times B$  不一定等於  $B \times A$ 。

(d)  $A \times B = 0$  不一定  $A = 0$  或  $B = 0$ 。