工程數學公式手冊

喻超凡編著

工程數學

公式手冊

研究所、高考、插大用書

NEERING MATHEMATICS ENGINEERING MATHEMATICS ENGINEERING

喻超凡 博士
喻超弘 老師 編著
喻　婕 老師

NEERING MATHEMATICS ENGINEERING MATHEMATICS ENGINEERING

喻超凡出版有限公司
http://www.superyu.idv.tw

序

許多看過這本書的同學, 第一個反應, 就有如王國維在人間詞話中的第三境「衆裏尋他千百度, 驀然回首, 那人卻在燈火闌珊處」, 因爲想要應考工程數學的同學, 幾乎都有相同的問題, 那就是在研究所考試的前一、兩天, 工程數學要讀些什麼？ 由於坊間的一些參考書, 不是太厚重就是理論太繁瑣艱澀, 在考試的前幾天根本無從下手複習, 其實在考試前一、兩天或是當天, 千萬不要再作歷屆試題或是參考書中的題目, 因爲這些題目有一部分不是馬上就可以解出, 當天作它, 會失掉信心, 在考場上也會喪失許多靈感。因此喻超凡數學工作室秉著武器在於精, 不在於多；開火在於準, 不在於強的理念, 集多位博士級的資深工程數學老師, 將所有研究所工程數學考試所須的公式, 精、準且有條理的彙整出來。以作爲同學在考試前衝刺所必備的工具書，考試當天所必帶的葵花寶典。

本書手稿雖經多次修定及校對, 但仍難免有所疏漏之處, 敬請各位老師和同學不吝賜教。同時本書已獲全國各大著名的補習班採用爲輔助教材，筆者在此致上最大的謝意。

喻超凡 YouTube

https://YouTube.com/@supyu

喻超凡

2024. 3.

喻超凡老師的家

超凡小鋪網址: https://mall.iopenmall.tw/059897/index.php

iOPEN Mall 超凡小鋪

蝦皮 超凡小鋪

喻超凡喻超弘 YouTube：https://YouTube.com/@supyu

喻超凡 Instagram

喻超凡 YouTube

喻超凡雲端翻轉數學教室：http://www.superyu.idv.tw

Line 微積分 群組

Line 工數線代 群組

喻超凡 雲端教室

目錄

I 基礎數學 1

1 代數 1

1.1 邏輯命題 1
1.2 數系 1
1.3 基本不等式 1
1.4 方程式組公式解法：(Cramer rule) 2
1.5 比例關係 2
1.6 因式分解公式 2
1.7 二項式 2
1.8 有限級數和 3

2 函數 3

2.1 定義 3
2.2 週期函數 4
2.3 奇偶函數 4
2.4 單調函數(增減函數之總稱) 4
2.5 最大整數函數 (Greatest Integer Function or Integer Floor Function) 4
2.6 絕對值函數 5
2.7 符號函數 5

3 多項式 5

3.1 多項式 $f(x) = g(x)$ 5
3.2 餘式定理 5

4 指數與對數函數 5

4.1 定義 5
4.2 指數律 6
4.3 基本指數與對數圖形 6
4.4 對數之運算 6
4.5 對數性質 7

5 三角函數 7

5.1 度量 7
5.2 三角函數基本關係 7
5.3 三角函數的函數值 7
5.4 複角三角函數 8

5.5 倍角三角函數 . . . 8
5.6 半角三角函數 . . . 8
5.7 公式變化 . . . 8
5.8 積化和差 . . . 9
5.9 和差化積 . . . 9
5.10 正弦餘弦定理 . . . 9
5.11 半角公式 . . . 9
5.12 面積公式 . . . 9
5.13 反三角函數部分 . . . 10
5.14 反三角函數正負互換公式 . . . 10
5.15 餘角函數關係 . . . 11
5.16 反正切函數公式 . . . 11
5.17 三角方程式解法 . . . 11
5.18 等值角 . . . 11

6 雙曲線函數(Hyperbolic function) 12

6.1 雙曲線函數之定義 . . . 12
6.2 基本性質 . . . 12
6.3 反雙曲函數 . . . 12

7 解析幾何 13

7.1 空間直角坐標系 . . . 13
7.2 斜角斜率 . . . 13
7.3 直線方程式 . . . 13
7.4 幾何基本公式 . . . 13
7.5 極坐標 . . . 14
7.6 形心(重心) . . . 14

II 微積分 15

1 基礎微積分 15

1.1 極限的定義 . . . 15
1.2 基本微分公式 . . . 15
1.3 基本積分公式 . . . 16
1.4 積分技巧 . . . 18
1.5 多變數函數鏈微法則(Chain Rule) . . . 21
1.6 函數之相依性(Functional Dependence) . . . 22
1.7 Leibniz 微分法則 . . . 22
1.8 Gamma 函數 . . . 23

1.9 Beta 函數 . . . 23
1.10 Unit step function(Heaviside function) & Dirac delta function . . . 24

2 常用的重要定理 **26**

III 工程數學 **27**

1 一階常微分方程式 **27**
1.1 基本定義 . . . 27
1.2 正合 ODE (Exact ODE) . . . 28
1.3 Grouping 方法 . . . 29
1.4 分離變數型微分方程式 . . . 29
1.5 線性型 . . . 30
1.6 Picard Method 近似解 . . . 32
1.7 一階高次常微分方程式 . . . 32
1.8 一階 ODE 之應用 . . . 33

2 高階線性 ODE **36**
2.1 函數之線性相依與線性獨立 . . . 36
2.2 正規(normal) ODE 解的性質 . . . 36
2.3 常係數線性 ODE 齊次解 . . . 38
2.4 待定係數(undetermined coefficients) 法求解特解 . . . 38
2.5 Lagrange 參數變化 (variaton parameter) 法求解特解 . . . 39
2.6 Heaviside 逆運算子法求解特解 $y_p = \frac{1}{L(D)}R(x)$ . . . 40
2.7 等維線性常微分方程式 . . . 41
2.8 二階變係數線性 ODE . . . 42
2.9 聯立 ODE 的穩定性 . . . 43
2.10 高階非線性 ODE . . . 45
2.11 二階 ODE 之應用 . . . 45

3 Laplace 轉換 **48**
3.1 定義 . . . 48
3.2 常用的基本函數的 Laplace 轉換 . . . 49
3.3 Laplace 轉換的基本定理 . . . 50

4 級數基本性質 **52**
4.1 常數級數的審斂法 . . . 52
4.2 均勻收斂(Uniform Convergence) . . . 53
4.3 收斂半徑與收斂區間 . . . 54

4.4 Taylor 級數與 Maclaurin 級數 55

5 常微分方程之冪級數解 **57**

5.1 二階線性 ODE 之常點與奇點 57

5.2 常點展開求解 ODE 57

5.3 規則奇異點展開法 58

6 Bessel 方程式及 Bessel 函數 **60**

7 Legendre 函數 **63**

8 Sturm–Liouville 邊界值問題 **65**

8.1 函數的內積及其正交性質 65

8.2 解邊界值問題常用之圖形及方程式的解 66

8.3 Sturm–Liouville 邊界值問題定義 66

8.4 常見的 Sturm Liouville 邊界值問題的解 68

8.5 廣義 Fourier 級數 69

9 Fourier 級數 、積分與轉換 **73**

9.1 Fourier 級數 、積分 73

9.2 Fourier 轉換 76

10 偏微分方程式 **81**

10.1 物理問題之數學模式 81

10.2 一維波動方程式的解 82

10.3 二維波動方程式的解 84

10.4 一維擴散方程式的解 85

10.5 二維Laplace 方程式的解 86

10.6 常見的特徵函數 88

10.7 非齊次 B.C. 修正方法 90

10.8 Laplace 轉換求解 PDE 91

10.9 Fourier 轉換求解 PDE 92

10.10Lagrange 氏 PDE 93

10.11二階偏微分方程式 94

11 向量分析 **97**

11.1 空間向量的基本性質 97

11.2 基本解析幾何 99

11.3 向量函數微分 99

11.4 線積分 102

11.5 保守場或梯度場 (Conservative field or gradient field) 103

11.6 面積分與體積分 . . . 104
11.7 曲線坐標 . . . 105
11.8 積分定理 . . . 109

12 矩陣分析 **112**
12.1 基本定義 . . . 112
12.2 矩陣的基本運算 . . . 112
12.3 其他特殊矩陣的定義 . . . 114
12.4 行列式 (Determinant) . . . 117
12.5 反矩陣的求法 . . . 119
12.6 矩陣的秩 (Rank) 及其性質 . . . 120
12.7 聯立方程式的解 . . . 120
12.8 特徵系統 . . . 121
12.9 特徵值速求法 . . . 123
12.10對角化 . . . 124
12.11Jordan Canonical form . . . 124
12.12利用對角化求解方陣函數 . . . 125
12.13利用Jordan form 求方陣函數 . . . 125
12.14解一階齊次常係數聯立 ODE . . . 126
12.15解二階齊次常係數聯立 ODE . . . 127
12.16解非齊次常係數聯立 ODE . . . 127
12.17Cayley–Hamilton 定理 . . . 128
12.18最小多項式 . . . 129
12.19實數二次式 (Quadratic form) . . . 129
12.20Hermitian 矩陣之特徵值系統的重要定理 . . . 131
12.21多變數函數極值 . . . 131
12.22廣義特徵值系統 $AX = \lambda BX$ 的性質 . . . 133

13 複變分析 **134**
13.1 複數的代數 . . . 134
13.2 複變函數微分 . . . 135
13.3 複變函數積分 . . . 138
13.4 Cauchy's 積分公式 . . . 139
13.5 Taylor 級數 . . . 140
13.6 Laurent's 級數 . . . 141
13.7 殘值 (Residue) 定理 . . . 141
13.8 重要定理 . . . 143
13.9 $\cos\theta$ 、$\sin\theta$ 有理式的定積分 . . . 143
13.10有理函數的瑕積分 . . . 143

13.11 Fourier 積分 144
13.12 具有分支點(Branch point) 的積分 144
13.13 Laplace 反轉換積分 145
13.14 映像 (Mapping) 145

14 數值分析 **146**
14.1 Newton–Raphson 法求方程式的解 146
14.2 Lagrangian 內插多項式 146
14.3 數值積分 146
14.4 數值微分 147
14.5 最小二乘方 148
14.6 Euler–Cauchy 法解一階 ODE 148
14.7 Runge–Kutta 法解一階 ODE 149
14.8 Adams 法解一階 ODE 149

15 差分(difference) 方程式 **150**

I 基礎數學

1 代數

1.1 邏輯命題

1. 同義敍述：眞值表相同者，稱爲同義。設p、q 表二敍述，$\sim p$ 表 p 之否定 (即非 p)，則

   (1) $\sim (p \cup q) \equiv (\sim p) \cap (\sim q)$

   (2) $\sim (p \cap q) \equiv (\sim p) \cup (\sim q)$

   (3) $(p \Rightarrow q) \equiv (\sim q \Rightarrow \sim p) \equiv (\sim p \cup q)$

   (4) $(p \Leftrightarrow q) \equiv (p \Rightarrow q) \cap (q \Rightarrow p)$

2. 充分、必要、充要條件：

   (1) 命題 $''S \Longleftrightarrow T''$ 爲眞時, 則 S 爲 T 之充分條件, T 爲 S 之必要條件。

   (2) 命題 $''S \Longleftrightarrow T''$ 爲眞時, 則 S 與 T 互爲充要條件。

1.2 數系

1. 數系的符號：$\mathbb{N}$ 表自然數系, $\mathbb{Z}$ 表整數系, $\mathbb{Q}$ 表有理數系, $\mathbb{R}$表實數系, $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ 表無理數系, $\mathbb{C}$ 表複數系。

2. 設 S 不爲空集合，且 $S \subset \mathbb{R}$ 同時 S 有上界，則 S 有最小上界。(實數的完備性)

3. 任意二相異實數之間必可找到第三個實數。(實數的稠密性)

1.3 基本不等式

1. a、$b \in \mathbb{R}$，則 $a > b \Leftrightarrow a - b > 0$

2. a、$b \in \mathbb{R}$，則 $\begin{cases} c < 0 \text{、} a > b \Rightarrow ac < bc \\ c > 0 \text{、} a > b \Rightarrow ac > bc \end{cases}$

3. $a > b$ 且 $c > d \Rightarrow a + c > b + d$

4. $a > b > 0$、$c > d > 0 \Rightarrow \dfrac{1}{a} < \dfrac{1}{b}$、$ac > bd$

5. 算幾不等式 (算術平均數 $\geq$ 幾何平均數)

   若 a_1、a_2、$\cdots$、$a_n > 0$ 則 $\dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1\, a_2 \cdots a_n}$

6. Cauchy–Schwarz 不等式 (又稱爲 Cauchy–Bunyakovsky–Schwarz 不等式)

   若 a_1、a_2、$\cdots$、a_n；b_1、b_2、$\cdots$、b_n 均爲實數，則

   $(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2) \geq (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n)^2$

1.4 方程式組公式解法：(Cramer rule)

1. $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$, $\triangle=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\neq 0$, 則 $x=\dfrac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$ ； $y=\dfrac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$

2. $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases}$, $\triangle=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}\neq 0$, 則

$$x=\frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\triangle} \quad ; \quad y=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\triangle} \quad ; \quad z=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}{\triangle}$$

1.5 比例關係

1. 合比定理：若 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$, 則 $\dfrac{a+b}{b}=\dfrac{c+d}{d}$ 或 $\dfrac{a}{a+b}=\dfrac{c}{c+d}$ 。
2. 分比定理：若 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$, 則 $\dfrac{a-b}{b}=\dfrac{c-d}{d}$ 或 $\dfrac{a}{b-a}=\dfrac{c}{d-c}$ 。
3. 合分比定理：若 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$, 則 $\dfrac{a+b}{a-b}=\dfrac{c+d}{c-d}$ 或 $\dfrac{a-b}{a+b}=\dfrac{c-d}{c+d}$ 。
4. 等比定理：若 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=\dfrac{e}{f}$, 則 $\dfrac{a+c+e}{b+d+f}=\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=\dfrac{e}{f}$ 。

1.6 因式分解公式

1. $x^2-y^2=(x-y)(x+y)$
2. $x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$ 、$x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$
3. $x^4-y^4=(x-y)(x+y)(x^2+y^2)$ 、$x^4+y^4=(x^2-\sqrt{2}\,xy+y^2)(x^2+\sqrt{2}\,xy+y^2)$
4. $n\in\mathbb{N}$, $x^n-y^n=(x-y)(x^{n-1}+x^{n-2}y+x^{n-3}y^2+\cdots+y^{n-1})$
5. n 爲正奇數 , $x^n+y^n=(x+y)(x^{n-1}-x^{n-2}y+x^{n-3}y^2-\cdots+(-1)^{n-1}y^{n-1})$

1.7 二項式

1. $(x+y)^n=C_0^nx^n+C_1^nx^{n-1}y+C_2^nx^{n-2}y^2+\cdots+C_n^ny^n=\sum\limits_{k=0}^{n}C_k^nx^{n-k}y^k \quad (n\in\mathbb{N})$

   其中 $C_0^n=1$ 、$C_k^n=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}=\dfrac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$

2. $(1+x)^n=1+nx+\dfrac{n(n-1)}{2!}x^2+\dfrac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3+\cdots \quad (n\notin\mathbb{N}\cup\{0\}\ ;\ |x|<1)$

3. $C^n_k = C^{n-1}_k + C^{n-1}_{k-1} \quad (n \in \mathbb{N})$

4. $C^n_0 + C^n_1 + \cdots + C^n_n = 2^n \quad (n \in \mathbb{N})$

5. $C^n_0 + C^n_2 + C^n_4 + \cdots = C^n_1 + C^n_3 + C^n_5 + \cdots = 2^{n-1} \quad (n \in \mathbb{N})$

6. $C^n_1 + 2 \cdot C^n_2 + \cdots + n \cdot C^n_n = n \cdot 2^{n-1} \quad (n \in \mathbb{N})$

7. $C^n_1 - 2 \cdot C^n_2 + \cdots + (-1)^{n-1} n C^n_n = 0 \quad (n \in \mathbb{N})$

1.8 有限級數和

1. 常用級數和

   (1) 等差數列 $\{a_n\}$, 首項 a_1 、公差 $d = a_{n+1} - a_n$, 則首 n 項和爲 $S_n = \dfrac{n}{2}(a_1 + a_n)$

   (2) 等比數列 $\{a_n\}$, 其首項爲 a_1 、公比爲 $r = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$, 則首 n 項和爲 $S_n = \begin{cases} na_1 & ; 當\ r = 1 \\ \dfrac{a_1 - ra_n}{1 - r} & ; 當\ r \neq 1 \end{cases}$

2. 自然級數 ($n \in \mathbb{N}$)

   (1) $\sum\limits_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

   (2) $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

   (3) $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \dfrac{1}{4}n^2(n+1)^2 = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2$

   (4) $\sum\limits_{k=1}^{n} k(k+1) = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + n(n+1) = \dfrac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

   (5) $\sum\limits_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \dfrac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$

3. 分數式級數和 ($n \in \mathbb{N}$)

   (1) $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)} = 1 - \dfrac{1}{n+1}$

   (2) $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k(k+1)(k+2)} = \dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{1 \cdot 2} - \dfrac{1}{(n+1)(n+2)})$

   (3) $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{k}{(k+1)!} = \dfrac{1}{2!} + \dfrac{2}{3!} + \cdots + \dfrac{n}{(n+1)!} = 1 - \dfrac{1}{(n+1)!}$

2 函數

2.1 定義

1. 設 A 、B 爲兩個非空集合, 若 A 中所有元素 , 恰有 B 中一元素對應 , 此對應的關係稱爲由 A 映至 B 之函數 。表示成 $f : A \to B$ 或 $f = f(x)$ 。

2. 設 $f : A \to B$, 若 $\forall x$ 、$y \in A$ 且 $x \neq y$, 則 $f(x) \neq f(y)$ 時, f 稱爲一對一函數 , 記作 $1 - 1$ 函數 。

3. 設 $f : A \to B$ 且 $f(A) = B$ 則 f 稱爲映成函數 。

4. 設 $f : A \to B$ 爲一對一映成函數時 , 則具有反函數 $f^{-1} : B \to A$ 。

5. 設 D 、E 、F 爲任意三個非空集合 , $f : D \to E$ 、$g : E \to F$ 是二個函數 , 函數 $h : D \to F$ 定義成 $h(x) = g(f(x)) = g \circ f(x)$, 則函數 h 稱爲 f 與 g 的合成函數 。

2.2 週期函數

1. 若函數 $f(x)$ 滿足 $f(x+p) = f(x)$, 則 $f(x)$ 稱爲週期函數數 , 而最小正數 p 叫做 $f(x)$ 之基本週期 。

2. 若 $f(x)$ 的週期爲 p 則 $f(kx)$ 之週期爲 $\dfrac{p}{|k|}$ $(k \neq 0)$ 。

2.3 奇偶函數

1. 若函數 $f(x)$ 滿足 $f(-x) = -f(x)$, 則 $f(x)$ 稱爲奇函數 。(圖形對稱原點)

2. 若函數 $f(x)$ 滿足 $f(-x) = f(x)$, 則 $f(x)$ 稱爲偶函數 。(圖形對稱 y 軸)

3. 常見的奇函數 ($-\ell \leq x \leq \ell$, a 爲常數)
   $\sin(ax)$ 、$\tan(ax)$ 、$\cot(ax)$ 、 $\sinh(ax)$ 、 $\tanh(ax)$ 、$\sin^{-1}(ax)$ 、$\tan^{-1}(ax)$ 、x 、x^3 、x^5 、$\cdots$

4. 常見的偶函數 ($-\ell \leq x \leq \ell$, a 爲常數)
   $\cos(ax)$ 、 $\cosh(ax)$ 、|奇偶函數| 、f(偶函數) 、c(常數) 、x^2 、x^4 、$\cdots$

2.4 單調函數(增減函數之總稱)

1. $\forall x_1$ 、$x_2 \in I$ 若 $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$, 則稱 $f(x)$ 在區間 I 中爲遞增函數 。

2. $\forall x_1$ 、$x_2 \in I$ 若 $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$, 則稱 $f(x)$ 在區間 I 中爲遞減函數 。

3. $\forall x_1$ 、$x_2 \in I$ 若 $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$, 則稱 $f(x)$ 在區間 I 中爲嚴格遞增函數 。

4. $\forall x_1$ 、$x_2 \in I$ 若 $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$, 則稱 $f(x)$ 在區間 I 中爲嚴格遞減函數 。

2.5 最大整數函數 (Greatest Integer Function or Integer Floor Function)

1. 定義 : $\lfloor x \rfloor$ (亦可用 $[x]$ 、$[\![x]\!]$ 來表示) , 取不大於 x 的最大整數 。

2. 基本性質:

   (1) $\lfloor x \rfloor = n$, 其中 $n \in \mathbb{Z}$, 則 $n \leq x < n+1$

   (2) $\lfloor \lfloor x \rfloor \rfloor = \lfloor x \rfloor$

   (3) $\lfloor x \pm n \rfloor = \lfloor x \rfloor \pm n$, 其中 $n \in \mathbb{Z}$

   (4) $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$

   (5) $\lfloor x \rfloor = -\lfloor x \rfloor - 1$, 其中 $x \notin \mathbb{Z}$

2.6 絕對值函數

1. $|x| = \begin{cases} x & ; x \geq 0 \\ -x & ; x < 0 \end{cases}$

2. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y| \quad ; \quad |\frac{x}{y}| = \frac{|x|}{|y|}$

3. $|x| - |y| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|$ (三角不等式)

4. $|x \pm y \pm z| \leq |x| + |y| + |z|$

2.7 符號函數

$$\mathrm{Sgn}(x) = \begin{cases} +1 & ; x > 0 \\ 0 & ; x = 0 \\ -1 & ; x < 0 \end{cases}$$

3 多項式

定義：多項式乃是自變數 x 的非負整數次冪, 有限項的線性組合 。例：$f(x) = x^2 + x + 1$

3.1 多項式 $f(x) = g(x)$

1. $f(x)$ 與 $g(x)$ 所對應的同次項係數相等 。

2. 任意的 x 值代入 , 則 $f(x)$ 與 $g(x)$ 等值 。

3.2 餘式定理

1. 若 $f(x)$ 爲多項式 , 則 $f(x)$ 除以 $x - a$ 的餘式爲 $f(a)$ 。

2. 若 $f(x)$ 爲多項式 , 則 $f(x)$ 除以 $(x-a)(x-b)$ 的餘式爲 $\frac{f(a)}{a-b}(x-b) + \frac{f(b)}{b-a}(x-a)$ 。

3. 若 $f(x)$ 爲多項式 , 則 $f(x)$ 除以 $(x-a)^2$ 的餘式爲 $f(a) + (x-a)f'(a)$。

4 指數與對數函數

4.1 定義

1. 若 $a > 0$ 且 $a \neq 1$ 、$x \in \mathbb{R}$, 則 $f(x) = a^x$ 稱爲以 a 爲底之指數函數 。

2. 以 a 爲底之指數函數的反函數 , 稱爲以 a 爲底之對數函數記爲 $\log_a$, 即 $y = a^x$ 則 $x = \log_a y$, 其中 y 稱爲眞數 。若 $a = e$ $(e = 2.71828182845904523536 \cdots)$ 時 , 稱爲自然對數, 表成 $x = \log_e y = \ln y$ 。

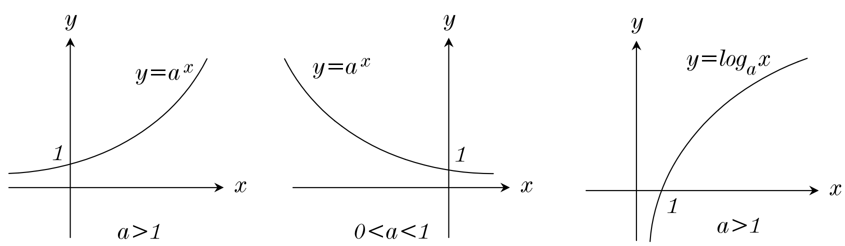
4.2 指數律

設 m 、$n \in \mathbb{Z}$, 且 a 、b 爲非零之實數, 則

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ 、$\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
2. $(a^m)^n = a^{mn}$ 、$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
3. $a^{-m} = \dfrac{1}{a^m}$ 、$a^0 = 1$
4. $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$ ($a > 0$)

4.3 基本指數與對數圖形

$y = a^x$	$y = a^x$	$y = \log_a x$	$y = \log_a x$
$(a > 1)$ 增函數	$(0 < a < 1)$ 減函數	$(a > 1)$ 增函數	$(0 < a < 1)$ 減函數



4.4 對數之運算

設 a 、$b > 0$, a 、$b \neq 1$ 、$M > 0$ 、$N > 0$

1. $\log_e M = \ln M$ 其中 $e = 2.71828182845904523536\cdots$
2. $a^{\log_a M} = M$ 、$\log_a a^M = M$ 、$e^{\ln M} = M$ 、$\ln e^M = M$
3. $a^M = e^{\ln(a^M)}$
4. $\ln e = 1$ 、$\ln 1 = 0$ 、$\ln 0^+ = -\infty$ 、$\ln \infty = \infty$
5. $\ln(MN) = \ln M + \ln N$
6. $\ln \dfrac{M}{N} = \ln M - \ln N$
7. $\ln M^p = p \ln M$; ($p \in \mathbb{R}$)
8. $\log_a M = \dfrac{\log_b M}{\log_b a}$ (換底)

4.5 對數性質

設 a、$b > 0$，a、$b \neq 1$，且 $x > y > 0$，則

1. $(a > 1$、$b > 1)$ 或 $(0 < a < 1$、$0 < b < 1) \Rightarrow \log_a b > 0$
2. $(a > 1$、$0 < b < 1)$ 或 $(0 < a < 1$、$b > 1) \Rightarrow \log_a b < 0$
3. $a > b > 1 \Rightarrow 0 < \log_a b < 1$
4. $1 > a > b > 0 \Rightarrow \log_a b > 1$
5. 若 $a > 1$ 時，$\log_a x > \log_a y$
6. 若 $0 < a < 1$ 時，$\log_a x < \log_a y$

5 三角函數

5.1 度量

1. 弧長 s，半徑 r，且中心角爲 θ 弳，則弧長 $s = r\theta$。
2. 中心角 θ 弳或爲 α^o，則 $\dfrac{\theta}{\pi} = \dfrac{\alpha}{180}$(即 $\pi = 180^o$，1 弳 $= 57^o$)。
3. 半徑 r，弧長 s，且中心角爲 θ 弳的扇形，其面積爲 $\dfrac{1}{2}r^2\theta = \dfrac{1}{2}rs$。

5.2 三角函數基本關係

1. $\sin\theta \cdot \csc\theta = 1$、$\cos\theta \cdot \sec\theta = 1$、$\tan\theta \cdot \cot\theta = 1$
2. $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$、$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$、$1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$
3. $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$、$\cot\theta = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$、$\sin^2\theta = \dfrac{\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$、$\cos^2\theta = \dfrac{1}{1+\tan^2\theta}$

5.3 三角函數的函數值

1. 特別角的三角函數值

θ	0^o	30^o	45^o	60^o	90^o	15^o	75^o	22.5^o
$\sin\theta$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$
$\cos\theta$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$
$\tan\theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞	$2-\sqrt{3}$	$2+\sqrt{3}$	$\sqrt{2}-1$

2. 鉛直軸加減角度函數正餘互換，水平軸加減角度函數不變。而新函數的符號視原函數所在的象限而定。
$\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)=\cos\theta$、$\tan(\frac{\pi}{2}-\theta)=\cot\theta$、$\sec(\frac{\pi}{2}-\theta)=\csc\theta$。
$\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$、$\tan(\pi-\theta)=-\tan\theta$、$\sec(\pi-\theta)=-\sec\theta$。

3. 三角函數的符號：

(1) $\sin\theta$、$\csc\theta$ 在第1及第2象限爲正值，第3及第4象限爲負值。

(2) $\cos\theta$、$\sec\theta$ 在第1及第4象限爲正值，第2及第3象限爲負值。

(3) $\tan\theta$、$\cot\theta$ 在第1及第3象限爲正值，第2及第4象限爲負值。

5.4 複角三角函數

1. $\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$

2. $\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$

3. $\tan(\alpha\pm\beta)=\dfrac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}$

5.5 倍角三角函數

1. $\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$

2. $\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta=2\cos^2\theta-1=1-2\sin^2\theta$

3. $\tan 2\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$ 、 $\sin 2\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}$ 、 $\cos 2\theta=\dfrac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$

4. $\sin 3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta$ 、 $\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$

5.6 半角三角函數

1. $\sin\dfrac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\theta}{2}}$ 、 $\cos\dfrac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\theta}{2}}$

2. $\tan\dfrac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}=\dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta}=\dfrac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$

3. $\tan\dfrac{\theta}{2}=t\Rightarrow\tan\theta=\dfrac{2t}{1-t^2}$ 、 $\sin\theta=\dfrac{2t}{1+t^2}$ 、 $\cos\theta=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$

5.7 公式變化

1. $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)=\sin^2\alpha-\sin^2\beta=\cos^2\beta-\cos^2\alpha$

2. $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)=\cos^2\alpha-\sin^2\beta=\cos^2\beta-\sin^2\alpha$

3. $\tan\alpha\pm\tan\beta=\dfrac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$ 、 $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{\tan\alpha-\tan\beta}$

4. $\cot\alpha\pm\cot\beta=\dfrac{\sin(\beta\pm\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}$ 、 $\dfrac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}=\dfrac{1-\tan\alpha\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

5. $a\cos\theta + b\sin\theta = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$ ，其中 $\sin\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ 、 $\cos\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

6. $\sin 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}$ 、 $\cos 2\alpha = \dfrac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}$ 、 $\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

5.8 積化和差

1. $\sin\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}$
2. $\cos\alpha\sin\beta = \dfrac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\}$
3. $\cos\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}$
4. $\sin\alpha\sin\beta = -\dfrac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\}$

5.9 和差化積

1. $\sin\alpha+\sin\beta = 2\ \sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\ \cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$
2. $\sin\alpha-\sin\beta = 2\ \cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\ \sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$
3. $\cos\alpha+\cos\beta = 2\ \cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\ \cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$
4. $\cos\alpha-\cos\beta = -2\ \sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\ \sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

5.10 正弦餘弦定理

1. 正弦定理：$\triangle ABC$ 的三邊長爲 a 、b 、c，且三邊的對角爲 α 、β 、γ，同時三角形外接圓半徑爲 R，則 $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma} = 2R$
2. 餘弦定理：$\triangle ABC$ 的三邊長爲 a 、b 、c，且三邊的對角爲 α 、β 、γ，則

   $a^2 = b^2+c^2-2bc\cos\alpha$ 、$b^2 = c^2+a^2-2ca\cos\beta$ 、$c^2 = a^2+b^2-2ab\cos\gamma$

5.11 半角公式

$\triangle ABC$ 的三邊長爲 a 、b 、c，且三邊的對角爲 α 、β 、γ，令 $s = \dfrac{a+b+c}{2}$，則

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}\ , \sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}\ , \tan\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$$

5.12 面積公式

$\triangle ABC$ 的三邊長爲 a 、b 、c，且三邊的對角爲 α 、β 、γ，令三角形的面積爲 $\triangle$，則

1. 已知二邊及夾角 $\triangle = \dfrac{1}{2}bc\sin\alpha = \dfrac{1}{2}ab\ \sin\gamma = \dfrac{1}{2}ac\ \sin\beta$ 。

2. 已知三邊 $\triangle = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ 其中 $s = \dfrac{a+b+c}{2}$

5.13 反三角函數部分

1. 反三角函數之定域與值域

反三角函數式	定義域	值 域
$\sin^{-1} x = \theta$	$\|x\| \le 1$	$\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
$\cos^{-1} x = \theta$	$\|x\| \le 1$	$\theta \in [0, \pi]$
$\tan^{-1} x = \theta$	$x \in \mathbb{R}$	$\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
$\cot^{-1} x = \theta$	$x \in \mathbb{R}$	$\theta \in (0 < \theta < \pi)$
$\sec^{-1} x = \theta$	$\|x\| \ge 1$	$\theta \in [0, \frac{\pi}{2}) \cup [\pi, \frac{3\pi}{2})$
$\csc^{-1} x = \theta$	$\|x\| \ge 1$	$\theta \in (0, \frac{\pi}{2}] \cup (\pi, \frac{3\pi}{2}]$

2. 正反函數相消公式

$\sin\sin^{-1} x = x \quad (\| x \| \le 1)$	$\sin^{-1}\sin\theta = \theta\ ,\ \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
$\cos\cos^{-1} x = x \quad (\| x \| \le 1)$	$\cos^{-1}\cos\theta = \theta\ ,\ \theta \in [0, \pi]$
$\tan\tan^{-1} x = x \quad (x \in \mathbb{R})$	$\tan^{-1}\tan\theta = \theta\ ,\ \theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
$\cot\cot^{-1} x = x \quad (x \in \mathbb{R})$	$\cot^{-1}\cot\theta = \theta\ ,\ \theta \in (0 < \theta < \pi)$
$\sec\sec^{-1} x = x \quad (\| x \| \ge 1)$	$\sec^{-1}\sec\theta = \theta\ ,\ \theta \in [0, \frac{\pi}{2}) \cup [\pi, \frac{3\pi}{2})$
$\csc\csc^{-1} x = x \quad (\| x \| \ge 1)$	$\csc^{-1}\csc\theta = \theta\ ,\ \theta \in (0, \frac{\pi}{2}] \cup (\pi, \frac{3\pi}{2}]$

5.14 反三角函數正負互換公式

1. $\sin^{-1}(-a) = -\sin^{-1} a \quad (| a | \le 1)$

2. $\cos^{-1}(-a) = \pi - \cos^{-1} a \quad (| a | \le 1)$

3. $\tan^{-1}(-a) = -\tan^{-1} a \quad (a \in \mathbb{R})$

4. $\cot^{-1}(-a) = \pi - \cot^{-1} a \quad (a \in \mathbb{R})$