

序

許多看過這本書的同學，第一個反應，就有如王國維在人間詞話中的第三境「衆裏尋他千百度，驀然回首，那人卻在燈火闌珊處」，因為想要應考工程數學的同學，幾乎都有相同的問題，那就是在研究所考試的前一、兩天，工程數學要讀些什麼？由於坊間的一些參考書，不是太厚重就是理論太繁瑣艱澀，在考試的前幾天根本無從下手複習，其實在考試前一、兩天或是當天，千萬不要再作歷屆試題或是參考書中的題目，因為這些題目有一部分不是馬上就可以解出，當天作它，會失掉信心，在考場上也會喪失許多靈感。因此喻超凡數學工作室秉著武器在於精，不在於多；開火在於準，不在於強的理念，集多位博士級的資深工程數學老師，將所有研究所工程數學考試所須的公式，精、準且有條理的彙整出來。以作為同學在考試前衝刺所必備的工具書，考試當天所必帶的葵花寶典。

本書手稿雖經多次修定及校對，但仍難免有所疏漏之處，敬請各位老師和同學不吝賜教。同時本書已獲全國各大補習班採用為輔助教材，筆者在此致最大的謝意。同時喻超凡數學工作室亦將多年之工程數學歷試詳解置於網站中，供同學下載參考，網址為 <http://www.superyu.idv.tw> 歡迎同學上網參觀指教。

喻超凡

2012. 2.

目錄

I 基礎數學	1
1 代數	1
1.1 邏輯命題	1
1.2 數系	1
1.3 基本不等式	1
1.4 方程式組公式解法：(Cramer rule)	2
1.5 比例關係	2
1.6 因式分解公式	2
1.7 二項式	2
1.8 有限級數和	3
2 函數	3
2.1 定義	3
2.2 週期函數	4
2.3 奇偶函數	4
2.4 單調函數(增減函數之總稱)	4
2.5 最大整數函數 (Greatest-integer function)	4
2.6 絕對值函數	5
2.7 符號函數	5
3 多項式	5
3.1 多項式 $f(x) = g(x)$	5
3.2 餘式定理	5
4 指數與對數函數	5
4.1 定義	5
4.2 指數律	6
4.3 基本指數與對數圖形	6
4.4 對數之運算	6
4.5 對數性質	7
5 三角函數	7
5.1 度量	7
5.2 三角函數基本關係	7
5.3 三角函數的函數值	7
5.4 複角三角函數	8

5.5	倍角三角函數	8
5.6	半角三角函數	8
5.7	公式變化	8
5.8	積化和差	9
5.9	和差化積	9
5.10	正弦餘弦定理	9
5.11	半角公式	9
5.12	面積公式	9
5.13	反三角函數部分	10
5.14	反三角函數正負互換公式	10
5.15	餘角函數關係	11
5.16	反正切函數公式	11
5.17	三角方程式解法	11
5.18	等值角	11
6	雙曲線函數(Hyperbolic function)	12
6.1	雙曲線函數之定義	12
6.2	基本性質	12
6.3	反雙曲函數	12
7	解析幾何	13
7.1	空間直角坐標系	13
7.2	斜角斜率	13
7.3	直線方程式	13
7.4	幾何基本公式	13
7.5	極坐標	14
7.6	形心(重心)	14
II	微積分	15
1	基礎微積分	15
1.1	極限的定義	15
1.2	基本微分公式	15
1.3	基本積分公式	16
1.4	積分技巧	18
1.5	多變數函數鏈微法則(Chain Rule)	21
1.6	函數之相依性(Functional Dependence)	22
1.7	Leibniz 微分法則	22
1.8	Gamma 函數	23

1.9	Beta 函數	23
1.10	Unit step function(Heaviside function) & Dirac delta function	24
2	常用的重要定理	26
III	工程數學	27
1	一階常微分方程式	27
1.1	基本定義	27
1.2	分離變數型微分方程式	27
1.3	正合型(Exact)	29
1.4	Grouping 方法	30
1.5	線性型	30
1.6	Picard Method 近似解	31
1.7	一階高次常微分方程式	32
1.8	一階 ODE 之應用	33
2	高階線性 ODE	36
2.1	函數之線性相依與線性獨立	36
2.2	正規(normal) ODE 解的性質	36
2.3	常係數線性 ODE 齊次解	38
2.4	待定係數(undetermined coefficients) 法求解特解	39
2.5	Lagrange 參數變化 (variaton parameter) 法求解特解	39
2.6	Heaviside 逆運算子法求解特解 $y_p = \frac{1}{L(D)}R(x)$	40
2.7	等維線性常微分方程式	42
2.8	二階變係數線性 ODE	42
2.9	聯立 ODE 的穩定性	43
2.10	高階非線性 ODE	45
2.11	二階 ODE 之應用	46
3	級數基本性質	49
3.1	常數級數的審斂法	49
3.2	均勻收斂	50
3.3	收斂半徑與收斂區間	51
3.4	Taylor 級數與 Maclaurin 級數	51
4	常微分方程之冪級數解	54
4.1	二階線性 ODE 之常點與奇點	54
4.2	常點展開求解 ODE	54
4.3	規則奇異點展開法	55

5 Bessel 方程式及 Bessel 函數	57
6 Legendre 函數	60
7 Sturm–Liouville 邊界值問題	62
7.1 函數的內積及其正交性質	62
7.2 解邊界值問題常用之圖形及方程式的解	63
7.3 Sturm–Liouville 邊界值問題定義	63
7.4 常見的 Sturm Liouville 邊界值問題的解	65
7.5 廣義 Fourier 級數	66
8 Fourier 級數、積分與轉換	70
8.1 Fourier 級數、積分	70
8.2 Fourier 轉換	73
9 Laplace 轉換	77
9.1 定義	77
9.2 常用的基本函數的 Laplace 轉換	77
9.3 Laplace 轉換的基本定理	79
10 偏微分方程式	81
10.1 物理問題之數學模式	81
10.2 一維波動方程式的解	82
10.3 二維波動方程式的解	84
10.4 一維擴散方程式的解	85
10.5 二維Laplace 方程式的解	86
10.6 常見特徵函數	88
10.7 非齊次 B.C. 修正方法	90
10.8 Laplace 轉換求解 PDE	91
10.9 Fourier 轉換求解 PDE	92
10.10Lagrange 氏 PDE	93
10.11二階偏微分方程式	94
11 向量分析	97
11.1 空間向量的基本性質	97
11.2 基本解析幾何	99
11.3 向量函數微分	99
11.4 線積分	102
11.5 保守場或梯度場 (Conservative field or gradient field)	103
11.6 面積分與體積分	104

11.7 曲線坐標	105
11.8 積分定理	109
12 矩陣分析	112
12.1 基本定義	112
12.2 矩陣的基本運算	113
12.3 其他特殊矩陣的定義	115
12.4 行列式 (Determinant)	118
12.5 反矩陣的求法	119
12.6 矩陣的秩 (Rank) 及其性質	120
12.7 聯立方程式的解	120
12.8 特徵系統	122
12.9 對角化	123
12.10 Jordan Canonical form	124
12.11 利用對角化求解方陣函數	124
12.12 利用 Jordan form 求方陣函數	125
12.13 解一階齊次常係數聯立 ODE	125
12.14 解二階齊次常係數聯立 ODE	126
12.15 解非齊次常係數聯立 ODE	127
12.16 Cayley–Hamilton 定理	127
12.17 最小多項式	129
12.18 實數二次式 (Quadratic form)	129
12.19 Hermitian 矩陣之特徵值系統的重要定理	130
12.20 多變數函數極值	131
12.21 廣義特徵值系統 $AX = \lambda BX$ 的性質	133
13 複變分析	134
13.1 複數的代數	134
13.2 複變函數微分	135
13.3 複變函數積分	138
13.4 Cauchy's 積分公式	139
13.5 Taylor 級數	140
13.6 Laurent's 級數	141
13.7 殘值 (Residue) 定理	141
13.8 重要定理	143
13.9 $\cos \theta$ 、 $\sin \theta$ 有理式的定積分	143
13.10 有理函數的瑕積分	143
13.11 Fourier 積分	144
13.12 具有分支點 (Branch point) 的積分	144

13.13 Laplace 反轉換積分	145
13.14 映像 (Mapping)	145
14 數值分析	146
14.1 Newton–Raphson 法求方程式的解	146
14.2 Lagrangian 內插多項式	146
14.3 數值積分	146
14.4 數值微分	147
14.5 最小二乘方	148
14.6 Euler–Cauchy 法解一階 ODE	148
14.7 Runge–Kutta 法解一階 ODE	149
14.8 Adams 法解一階 ODE	149
15 差分(difference) 方程式	150

I 基礎數學

1 代數

1.1 邏輯命題

1. 同義敘述：真值表相同者，稱為同義。設 p 、 q 表二敘述， $\sim p$ 表 p 之否定（即非 p ），則

$$(1) \sim (p \cup q) \equiv (\sim p) \cap (\sim q)$$

$$(2) \sim (p \cap q) \equiv (\sim p) \cup (\sim q)$$

$$(3) (p \Rightarrow q) \equiv (\sim q \Rightarrow \sim p) \equiv (\sim p \cup q)$$

$$(4) (p \Leftrightarrow q) \equiv (p \Rightarrow q) \cap (q \Rightarrow p)$$

2. 充分、必要、充要條件：

(1) 命題 " $S \Leftrightarrow T$ " 為真時，則 S 為 T 之充分條件， T 為 S 之必要條件。

(2) 命題 " $S \Leftrightarrow T$ " 為真時，則 S 與 T 互為充要條件。

1.2 數系

1. 數系的符號： \mathbb{N} 表自然數系， \mathbb{Z} 表整數系， \mathbb{Q} 表有理數系， \mathbb{R} 表實數系， $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ 表無理數系， \mathbb{C} 表複數系。

2. 設 S 不為空集合，且 $S \subset \mathbb{R}$ 同時 S 有上界，則 S 有最小上界。（實數的完備性）

3. 任意二相異實數之間必可找到第三個實數。（實數的稠密性）

1.3 基本不等式

1. $a, b \in \mathbb{R}$ ，則 $a > b \Leftrightarrow a - b > 0$

2. $a, b \in \mathbb{R}$ ，則 $\begin{cases} c < 0, a > b \Rightarrow ac < bc \\ c > 0, a > b \Rightarrow ac > bc \end{cases}$

3. $a > b$ 且 $c > d \Rightarrow a + c > b + d$

4. $a > b > 0, c > d > 0 \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}, ac > bd$

5. 算幾不等式（算術平均數 \geq 幾何平均數）

若 $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$ 則 $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$

6. Cauchy-Schwarz 不等式（又稱為 Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz 不等式）

若 $a_1, a_2, \dots, a_n; b_1, b_2, \dots, b_n$ 均為實數，則

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \geq (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2$$

1.4 方程式組公式解法：(Cramer rule)

$$1. \begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}, \Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0, \text{ 則 } x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

$$2. \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}, \Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0, \text{ 則}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\Delta}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\Delta}; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}{\Delta}$$

1.5 比例關係

1. 合比定理：若 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ，則 $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$ 或 $\frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}$ 。
2. 分比定理：若 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ，則 $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$ 或 $\frac{a}{b-a} = \frac{c}{d-c}$ 。
3. 合分比定理：若 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ，則 $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$ 或 $\frac{a-b}{a+b} = \frac{c-d}{c+d}$ 。
4. 等比定理：若 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$ ，則 $\frac{a+c+e}{b+d+f} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$ 。

1.6 因式分解公式

1. $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$
2. $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$ 、 $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$
3. $x^4 - y^4 = (x - y)(x + y)(x^2 + y^2)$ 、 $x^4 + y^4 = (x^2 - \sqrt{2}xy + y^2)(x^2 + \sqrt{2}xy + y^2)$
4. $n \in \mathbb{N}$ ， $x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \cdots + y^{n-1})$
5. n 為正奇數， $x^n + y^n = (x + y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \cdots + (-1)^{n-1}y^{n-1})$

1.7 二項式

$$1. (x + y)^n = C_0^n x^n + C_1^n x^{n-1}y + C_2^n x^{n-2}y^2 + \cdots + C_n^n y^n = \sum_{k=0}^n C_k^n x^{n-k}y^k \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$\text{其中 } C_0^n = 1, C_k^n = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

$$2. (1 + x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \cdots \quad (n \notin \mathbb{N} \cup \{0\}; |x| < 1)$$

3. $C_k^n = C_k^{n-1} + C_{k-1}^{n-1} \quad (n \in \mathbb{N})$
4. $C_0^n + C_1^n + \cdots + C_n^n = 2^n \quad (n \in \mathbb{N})$
5. $C_0^n + C_2^n + C_4^n + \cdots = C_1^n + C_3^n + C_5^n + \cdots = 2^{n-1} \quad (n \in \mathbb{N})$
6. $C_1^n + 2 \cdot C_2^n + \cdots + n \cdot C_n^n = n \cdot 2^{n-1} \quad (n \in \mathbb{N})$
7. $C_1^n - 2 \cdot C_2^n + \cdots + (-1)^{n-1} n C_n^n = 0 \quad (n \in \mathbb{N})$

1.8 有限級數和

1. 常用級數和

(1) 等差數列 $\{a_n\}$ ，首項 a_1 、公差 $d = a_{n+1} - a_n$ ，則首 n 項和為 $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$

(2) 等比數列 $\{a_n\}$ ，其首項為 a_1 、公比為 $r = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ ，則首 n 項和為 $S_n = \begin{cases} na_1 & ; \text{當 } r = 1 \\ \frac{a_1 - ra_n}{1 - r} & ; \text{當 } r \neq 1 \end{cases}$

2. 自然級數 ($n \in \mathbb{N}$)

$$(1) \sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$(2) \sum_{k=1}^n k^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$(3) \sum_{k=1}^n k^3 = 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 = (1+2+3+\cdots+n)^2$$

$$(4) \sum_{k=1}^n k(k+1) = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + n(n+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

$$(5) \sum_{k=1}^n k(k+1)(k+2) = \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$$

3. 分數式級數和 ($n \in \mathbb{N}$)

$$(1) \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$(2) \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right)$$

$$(3) \sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!} = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \cdots + \frac{n}{(n+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$$

2 函數

2.1 定義

1. 設 A 、 B 為兩個非空集合，若 A 中所有元素，恰有 B 中一元素對應，此對應的關係稱為由 A 映至 B 之函數。表示成 $f: A \rightarrow B$ 或 $f = f(x)$ 。

2. 設 $f : A \rightarrow B$, 若 $\forall x, y \in A$ 且 $x \neq y$, 則 $f(x) \neq f(y)$ 時, f 稱爲一對一函數, 記作 1-1 函數。
3. 設 $f : A \rightarrow B$ 且 $f(A) = B$ 則 f 稱爲映成函數。
4. 設 $f : A \rightarrow B$ 爲一對一映成函數時, 則具有反函數 $f^{-1} : B \rightarrow A$ 。
5. 設 D, E, F 爲任意三個非空集合, $f : D \rightarrow E, g : E \rightarrow F$ 是二個函數, 函數 $h : D \rightarrow F$ 定義成 $h(x) = g(f(x)) = g \circ f(x)$, 則函數 h 稱爲 f 與 g 的合成函數。

2.2 週期函數

1. 若函數 $f(x)$ 滿足 $f(x+p) = f(x)$, 則 $f(x)$ 稱爲週期函數, 而最小正數 p 叫做 $f(x)$ 之週期。
2. 若 $f(x)$ 的週期爲 p 則 $f(kx)$ 之週期爲 $\frac{p}{|k|}$ ($k \neq 0$)。

2.3 奇偶函數

1. 若函數 $f(x)$ 滿足 $f(-x) = -f(x)$, 則 $f(x)$ 稱爲奇函數。(圖形對稱原點)
2. 若函數 $f(x)$ 滿足 $f(-x) = f(x)$, 則 $f(x)$ 稱爲偶函數。(圖形對稱 y 軸)

3. 常見的奇函數

$\sin x, \tan x, \cot x, \sinh x, \tanh x, \sin^{-1} x, \tan^{-1} x, x, x^3, x^5, \dots$

4. 常見的偶函數

$\cos x, \cosh x, |\text{奇偶函數}|, f(\text{偶函數}), c(\text{常數}), x^2, x^4, \dots$

2.4 單調函數(增減函數之總稱)

1. $\forall x_1, x_2 \in I$ 若 $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$, 則稱 $f(x)$ 在區間 I 中爲遞增函數。
2. $\forall x_1, x_2 \in I$ 若 $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$, 則稱 $f(x)$ 在區間 I 中爲遞減函數。
3. $\forall x_1, x_2 \in I$ 若 $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$, 則稱 $f(x)$ 在區間 I 中爲嚴格遞增函數。
4. $\forall x_1, x_2 \in I$ 若 $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$, 則稱 $f(x)$ 在區間 I 中爲嚴格遞減函數。

2.5 最大整數函數 (Greatest-integer function)

1. $[x]$ 表示取不大於 x 的最大整數。
2. 基本性質:
 - (1) $[x] = n$, 其中 $n \in \mathbb{Z}$, 則 $n \leq x < n+1$
 - (2) $[[x]] = [x]$
 - (3) $[x \pm n] = [x] \pm n$, 其中 $n \in \mathbb{Z}$
 - (4) $x-1 < [x] \leq x$
 - (5) $[-x] = -[x] - 1$, 其中 $x \notin \mathbb{Z}$

2.6 絕對值函數

1. $|x| = \begin{cases} x & ; x \geq 0 \\ -x & ; x < 0 \end{cases}$
2. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$; $|\frac{x}{y}| = \frac{|x|}{|y|}$
3. $|x| - |y| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|$ (三角不等式)
4. $|x \pm y \pm z| \leq |x| + |y| + |z|$

2.7 符號函數

$$\text{Sgn}(x) = \begin{cases} +1 & ; x > 0 \\ 0 & ; x = 0 \\ -1 & ; x < 0 \end{cases}$$

3 多項式

定義：多項式乃是自變數 x 的非負整數次冪，有限項的線性組合。例： $f(x) = x^2 + x + 1$

3.1 多項式 $f(x) = g(x)$

1. $f(x)$ 與 $g(x)$ 所對應的同次項係數相等。
2. 任意的 x 值代入，則 $f(x)$ 與 $g(x)$ 等值。

3.2 餘式定理

1. 若 $f(x)$ 為多項式，則 $f(x)$ 除以 $x - a$ 的餘式為 $f(a)$ 。
2. 若 $f(x)$ 為多項式，則 $f(x)$ 除以 $(x - a)(x - b)$ 的餘式為 $\frac{f(a)}{a - b}(x - b) + \frac{f(b)}{b - a}(x - a)$ 。
3. 若 $f(x)$ 為多項式，則 $f(x)$ 除以 $(x - a)^2$ 的餘式為 $f(a) + (x - a)f'(a)$ 。

4 指數與對數函數

4.1 定義

1. 若 $a > 0$ 且 $a \neq 1$ 、 $x \in \mathbb{R}$ 則 $f(x) = a^x$ 稱為以 a 為底之指數函數。
2. 以 a 為底之指數函數的反函數，稱為以 a 為底之對數函數記為 \log_a ，即 $y = a^x$ 則 $x = \log_a y$ ，其中 y 稱為真數。若 $a = e$ ($e = 2.71828182845904523536 \dots$) 時，稱為自然對數，表成 $x = \log_e y = \ln y$ 。

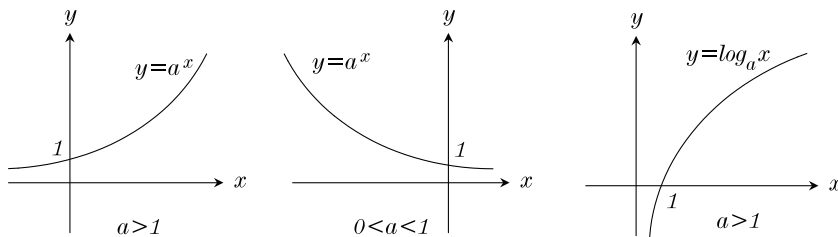
4.2 指數律

設 $m, n \in \mathbb{Z}$, 且 a, b 為非零之實數, 則

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ 、 $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
2. $(a^m)^n = a^{mn}$ 、 $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
3. $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$ 、 $a^0 = 1$
4. $\sqrt[n]{a^n} = a^{\frac{n}{n}} = a$ ($a > 0$)

4.3 基本指數與對數圖形

$y = a^x$ ($a > 1$) 增函數	$y = a^x$ ($0 < a < 1$) 減函數	$y = \log_a x$ ($a > 1$) 增函數	$y = \log_a x$ ($0 < a < 1$) 減函數
------------------------------	----------------------------------	-----------------------------------	---------------------------------------



4.4 對數之運算

設 $a, b > 0$, $a, b \neq 1$, $M > 0$, $N > 0$

1. $\log_e M = \ln M$ 其中 $e = 2.71828182845904523536 \dots$
2. $a^{\log_a M} = M$ 、 $\log_a a^M = M$ 、 $e^{\ln M} = M$ 、 $\ln e^M = M$
3. $a^M = e^{\ln(a^M)}$
4. $\ln e = 1$ 、 $\ln 1 = 0$ 、 $\ln 0^+ = -\infty$ 、 $\ln \infty = \infty$
5. $\ln(MN) = \ln M + \ln N$
6. $\ln \frac{M}{N} = \ln M - \ln N$
7. $\ln M^p = p \ln M$ ($p \in \mathbb{R}$)
8. $\log_a M = \frac{\log_b M}{\log_b a}$ (換底)

4.5 對數性質

設 $a, b > 0, a, b \neq 1$, 且 $x > y > 0$, 則

1. $(a > 1, b > 1)$ 或 $(0 < a < 1, 0 < b < 1) \Rightarrow \log_a b > 0$
2. $(a > 1, 0 < b < 1)$ 或 $(0 < a < 1, b > 1) \Rightarrow \log_a b < 0$
3. $a > b > 1 \Rightarrow 0 < \log_a b < 1$
4. $1 > a > b > 0 \Rightarrow \log_a b > 1$
5. 若 $a > 1$ 時, $\log_a x > \log_a y$
6. 若 $0 < a < 1$ 時, $\log_a x < \log_a y$

5 三角函數

5.1 度量

1. 弧長 s , 半徑 r , 且中心角為 θ 徑, 則弧長 $s = r\theta$ 。
2. 中心角 θ 徑或為 α° , 則 $\frac{\theta}{\pi} = \frac{\alpha}{180}$ (即 $\pi = 180^\circ$, 1 徑 = 57°)。
3. 半徑 r , 弧長 s , 且中心角為 θ 徑的扇形, 其面積為 $\frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}rs$ 。

5.2 三角函數基本關係

1. $\sin \theta \cdot \csc \theta = 1, \cos \theta \cdot \sec \theta = 1, \tan \theta \cdot \cot \theta = 1$
2. $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1, 1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta, 1 + \cot^2 \theta = \csc^2 \theta$
3. $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}, \cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}, \sin^2 \theta = \frac{\tan^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta}, \cos^2 \theta = \frac{1}{1 + \tan^2 \theta}$

5.3 三角函數的函數值

1. 特別角的三角函數值

θ	0°	30°	45°	60°	90°	15°	75°	22.5°
$\sin \theta$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$	$\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$
$\cos \theta$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$
$\tan \theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞	$2 - \sqrt{3}$	$2 + \sqrt{3}$	$\sqrt{2} - 1$

2. 鉛直軸加減角度函數正餘互換，水平軸加減角度函數不變。而新函數的符號視原函數所在的象限而定。

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos \theta, \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cot \theta, \sec\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \csc \theta。$$

$$\sin(\pi - \theta) = \sin \theta, \tan(\pi - \theta) = -\tan \theta, \sec(\pi - \theta) = -\sec \theta。$$

3. 三角函數的符號：

(1) $\sin \theta$ 、 $\csc \theta$ 在第 1 及第 2 象限為正值，第 3 及第 4 象限為負值。

(2) $\cos \theta$ 、 $\sec \theta$ 在第 1 及第 4 象限為正值，第 2 及第 3 象限為負值。

(3) $\tan \theta$ 、 $\cot \theta$ 在第 1 及第 3 象限為正值，第 2 及第 4 象限為負值。

5.4 複角三角函數

$$1. \sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$2. \cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$3. \tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$$

5.5 倍角三角函數

$$1. \sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$2. \cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = 2 \cos^2 \theta - 1 = 1 - 2 \sin^2 \theta$$

$$3. \tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}, \sin 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 + \tan^2 \theta}, \cos 2\theta = \frac{1 - \tan^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta}$$

$$4. \sin 3\theta = 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta, \cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$$

5.6 半角三角函數

$$1. \sin \frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}}, \cos \frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}}$$

$$2. \tan \frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}} = \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} = \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta}$$

$$3. \tan \frac{\theta}{2} = t \Rightarrow \tan \theta = \frac{2t}{1 - t^2}, \sin \theta = \frac{2t}{1 + t^2}, \cos \theta = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

5.7 公式變化

$$1. \sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta) = \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta = \cos^2 \beta - \cos^2 \alpha$$

$$2. \cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \beta = \cos^2 \beta - \sin^2 \alpha$$

$$3. \tan \alpha \pm \tan \beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}, \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha - \beta)} = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{\tan \alpha - \tan \beta}$$

$$4. \cot \alpha \pm \cot \beta = \frac{\sin(\beta \pm \alpha)}{\sin \alpha \sin \beta}, \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha - \beta)} = \frac{1 - \tan \alpha \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$$

5. $a \cos \theta + b \sin \theta = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\theta + \alpha)$, 其中 $\sin \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ 、 $\cos \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$
6. $\sin 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$ 、 $\cos 2\alpha = \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$ 、 $\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$

5.8 積化和差

- $2 \sin \alpha \cos \beta = \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)$
- $2 \cos \alpha \sin \beta = \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)$
- $2 \cos \alpha \cos \beta = \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)$
- $-2 \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)$

5.9 和差化積

- $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$
- $\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$
- $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$
- $\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$

5.10 正弦餘弦定理

- 正弦定理： $\triangle ABC$ 的三邊長為 a 、 b 、 c ，且三邊的對角為 α 、 β 、 γ ，同時三角形外接圓半徑為 R ，則

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$

- 餘弦定理： $\triangle ABC$ 的三邊長為 a 、 b 、 c ，且三邊的對角為 α 、 β 、 γ ，則

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha, \quad b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos \beta, \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

5.11 半角公式

$\triangle ABC$ 的三邊長為 a 、 b 、 c ，且三邊的對角為 α 、 β 、 γ ，令 $s = \frac{a + b + c}{2}$ ，則

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}, \quad \sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}, \quad \tan \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$$

5.12 面積公式

$\triangle ABC$ 的三邊長為 a 、 b 、 c ，且三邊的對角為 α 、 β 、 γ ，令三角形的面積為 Δ ，則

- 已知二邊及夾角 $\Delta = \frac{1}{2}bc \sin \alpha = \frac{1}{2}ab \sin \gamma = \frac{1}{2}ac \sin \beta$ 。

2. 已知三邊 $\triangle = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ 其中 $s = \frac{a+b+c}{2}$

5.13 反三角函數部分

1. 反三角函數之定域與值域

反三角函數式	定義域	值域
$\sin^{-1} x = \theta$	$ x \leq 1$	$\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
$\cos^{-1} x = \theta$	$ x \leq 1$	$\theta \in [0, \pi]$
$\tan^{-1} x = \theta$	$x \in \mathbb{R}$	$\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
$\cot^{-1} x = \theta$	$x \in \mathbb{R}$	$\theta \in (0 < \theta < \pi)$
$\sec^{-1} x = \theta$	$ x \geq 1$	$\theta \in [0, \frac{\pi}{2}) \cup [\pi, \frac{3\pi}{2})$
$\csc^{-1} x = \theta$	$ x \geq 1$	$\theta \in (0, \frac{\pi}{2}] \cup (\pi, \frac{3\pi}{2}]$

2. 正反函數相消公式

$\sin \sin^{-1} x = x \quad (x \leq 1)$	$\sin^{-1} \sin \theta = \theta, \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
$\cos \cos^{-1} x = x \quad (x \leq 1)$	$\cos^{-1} \cos \theta = \theta, \theta \in [0, \pi]$
$\tan \tan^{-1} x = x \quad (x \in \mathbb{R})$	$\tan^{-1} \tan \theta = \theta, \theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
$\cot \cot^{-1} x = x \quad (x \in \mathbb{R})$	$\cot^{-1} \cot \theta = \theta, \theta \in (0 < \theta < \pi)$
$\sec \sec^{-1} x = x \quad (x \geq 1)$	$\sec^{-1} \sec \theta = \theta, \theta \in [0, \frac{\pi}{2}) \cup [\pi, \frac{3\pi}{2})$
$\csc \csc^{-1} x = x \quad (x \geq 1)$	$\csc^{-1} \csc \theta = \theta, \theta \in (0, \frac{\pi}{2}] \cup (\pi, \frac{3\pi}{2}]$

5.14 反三角函數正負互換公式

- $\sin^{-1}(-a) = -\sin^{-1} a \quad (|a| \leq 1)$
- $\cos^{-1}(-a) = \pi - \cos^{-1} a \quad (|a| \leq 1)$
- $\tan^{-1}(-a) = -\tan^{-1} a \quad (a \in \mathbb{R})$
- $\cot^{-1}(-a) = \pi - \cot^{-1} a \quad (a \in \mathbb{R})$