

# 公職技師工程數學

95-101 年歷屆試題詳解

電機高普特考技師專用書

喻超凡博士、喻超弘老師 編著

喻超凡數位企業有限公司

[http:// www.superyu.idv.tw](http://www.superyu.idv.tw)

# 目錄

<b>I</b>	<b>95 年詳解</b>	<b>1</b>
1.	95年公務人員電力、電子、醫學工程三級高考	3
2.	95年地方政府電力、電子工程三等考試	19
3.	95年電機技師高等考試	32
4.	95年電子技師高等考試	39
5.	95年調查局調查人員電子科學組特考	46
6.	95年警察刑事鑑識人員特考	51
<b>II</b>	<b>96 年詳解</b>	<b>57</b>
1.	96年公務人員電力、電子工程三級高考	59
2.	96年地方政府電力、電子、電信工程三等考試	71
3.	96年電機技師高等考試	84
4.	96年電子技師高等考試	88
5.	96年調查局調查人員電子科學組特考	96
<b>III</b>	<b>97 年詳解</b>	<b>103</b>
1.	97年公務人員電力、電子、醫學工程三級高考	105
2.	97年公務人員身心障礙人員電子特考	120
3.	97年鐵路人員電力工程三級特考	133
4.	97年地方政府電力、電子工程三等考試	145
5.	97年電機技師高等考試	159
6.	97年電子技師高等考試	166
7.	97年調查局調查人員電子科學組特考	170
<b>IV</b>	<b>98 年詳解</b>	<b>175</b>
1.	98年公務人員電力、電子、電信、醫學工程三級高考	177
2.	98年公務人員身心障礙人員電力、電子特考	190
3.	98年鐵路人員電力工程三級特考	204
4.	98年國家安全局情報人員電子組特考	217
5.	98年地方政府電力、電子工程三等考試	230
6.	98年電機技師高等考試	244

7.	98年電子技師高等考試 . . . . .	249
8.	98年調查局調查人員電子科學組特考 . . . . .	255
<b>V</b>	<b>99年詳解</b>	<b>265</b>
1.	99年公務人員電力、電子、醫學工程三級高考 . . . . .	267
2.	99年公務人員身心障礙人員電力、電子特考 . . . . .	280
3.	99年鐵路人員電力、電子工程三級特考 . . . . .	292
4.	99年國家安全局情報人員電子組特考 . . . . .	305
5.	99年地方政府電力工程三等考試 . . . . .	319
6.	99年電機技師高等考試 . . . . .	333
7.	99年電子技師高等考試 . . . . .	337
8.	99年調查局調查人員電子科學組特考 . . . . .	342
<b>VI</b>	<b>100年詳解</b>	<b>347</b>
1.	100年公務人員電力、電子、醫學工程三級高考 . . . . .	349
2.	100年公務人員身心障礙人員電力、電子特考 . . . . .	363
3.	100年鐵路人員電力、電子工程三級特考 . . . . .	377
4.	100年國家安全局情報人員電子組特考 . . . . .	391
5.	100年地方政府電力、電子、電信三等考試 . . . . .	403
6.	100年電機技師高等考試 . . . . .	416
7.	100年電子技師高等考試 . . . . .	420
8.	100年調查局調查人員電子科學組特考 . . . . .	425
<b>VII</b>	<b>101年詳解</b>	<b>429</b>
1.	101年公務人員電力、電子、電信工程三級高考 . . . . .	431
2.	101年鐵路人員電力、電子工程三級特考 . . . . .	446
3.	101年國家安全局情報人員電子組特考 . . . . .	459
4.	101年地方政府電力、電子、電信三等考試 . . . . .	472
5.	101年電機技師高等考試 . . . . .	488
6.	101年電子技師高等考試 . . . . .	492
7.	101年調查局調查人員電子科學組特考 . . . . .	496

# Part I

## 95 年 詳 解

# 1. 95年公務人員電力、電子、醫學工程高考

## 甲、申論題部分 (50分)

1. 若  $C$  表示一個  $|z - 1| = 2$  的圓，試求圍線積分  $\oint_C \frac{e^z}{z(z-4)} dz$ 。(5分)

《喻超凡，喻超弘 95 電力、電子、醫工高考》

《解》☞ 令  $f(z) = \frac{e^z}{z(z-4)}$ ，故  $f(z)$  在  $C$  內具有  $z = 0$  的一階 pole，且

$$\text{Res}f(0) = \left. \frac{e^z}{z-4} \right|_{z=0} = -\frac{1}{4}$$

故

$$\oint_C \frac{e^z}{z(z-4)} dz = 2\pi i \text{Res}f(0) = 2\pi i \left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{\pi i}{2}$$

2. (1) 求  $F(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } |x| < a \\ 0 & \text{if } |x| > a \end{cases}$  之傅立葉轉換 ( $f(w) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x)e^{-iwx} dx$ )。(5分)

(2) 計算  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(wa) \cos(wx)}{w} dw$ 。(5分)

(3) 求  $\int_0^{\infty} \frac{\sin w}{w} dw$  之值。(5分)

《喻超凡，喻超弘 95 電力、電子、醫工高考》

《解》☞

(1)

$$\begin{aligned} f(w) &= \mathcal{F}\{F(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} F(x)e^{-iwx} dx \\ &= \int_{-a}^a (\cos wx - i \sin wx) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 2 \int_0^a \cos wx \, dx = 2 \frac{\sin wx}{w} \Big|_0^a \\
 &= \frac{2 \sin wa}{w}
 \end{aligned}$$

(2) 因

$$\begin{aligned}
 F(x) &= \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{2 \sin wa}{w} \right\} \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2 \sin wa}{w} e^{iwx} \, dw \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin wa}{w} (\cos wx + i \sin wx) \, dw \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin wa \cos wx}{w} \, dw
 \end{aligned}$$

即

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin wa \cos wx}{w} \, dw = \begin{cases} \pi & ; |x| < a \\ 0 & ; |x| > a \\ \frac{\pi}{2} & ; x = \pm a \end{cases}$$

(3)

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin wa}{w} \, dw = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin wa}{w} \, dw = \frac{1}{2} \pi F(0) = \frac{\pi}{2}$$

3. 令矩陣  $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ , 試求

(1)  $A$  之特徵值 (eigenvalues) (3分)

(2)  $A$  之特徵向量 (eigenvectors) (3分)

(3) 計算  $e^{-A} = ?$  (4分)

《喻超凡, 喻超弘 95 電力、電子、醫工高考》

《解》

(1) 由  $\det(A - \lambda I) = 0$ , 可得  $A$  的特徵值為  $\lambda = 4, -3$ 。

(2) 將  $\lambda = 4$  代回  $(A - \lambda I)X = 0$  中可得

$$\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

可得對應的特徵向量為

$$X = c_1 \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} \quad (c_1 \neq 0)$$

將  $\lambda = -3$  代回  $(A - \lambda I)X = 0$  中可得

$$\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

可得對應的特徵向量為

$$X = c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (c_2 \neq 0)$$

(3) 令

$$e^{-A} = aA + bI$$

將  $\lambda = 4, -3$  代入上式, 可得

$$\begin{cases} e^{-4} = 4a + b \\ e^3 = -3a + b \end{cases}$$

故

$$a = \frac{1}{7}(e^{-4} - e^3), \quad b = \frac{1}{7}(3e^{-4} + 4e^3)$$

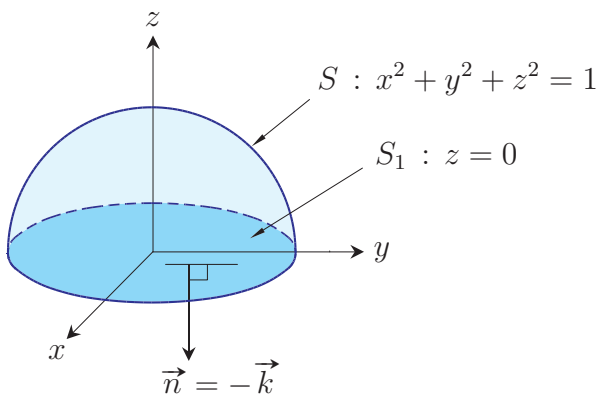
則

$$e^{-A} = \frac{1}{7}(e^{-4} - e^3)A + \frac{1}{7}(3e^{-4} + 4e^3)I$$

4. 有一表面  $S$  如下  $S : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0$ , 假設有一向量函數為

$\vec{F}(x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ , 請計算  $\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{A}$  之值。(10分)

《喻超凡, 喻超弘 95 電力、電子、醫工高考》



《解》 令  $S + S_1$  所圍的區域為上半球  $D$  (如圖), 則

$$\iint_{S+S_1} (\vec{F} \cdot \vec{n}) dA = \iiint_D (\nabla \cdot \vec{F}) dx dy dz$$

故

$$\iint_S (\vec{F} \cdot \vec{n}) dA = \iiint_D (\nabla \cdot \vec{F}) dx dy dz - \iint_{S_1} (\vec{F} \cdot \vec{n}) dA \quad (1)$$

因

$$\iiint_D (\nabla \cdot \vec{F}) dx dy dz = \iiint_D 3 dx dy dz = 3 \times \frac{1}{2} \times \frac{4\pi}{3} \times 1^3 = 2\pi \quad (2)$$

且  $S_1 : z = 0, x^2 + y^2 \leq 1$ , 故  $\vec{n} = -\vec{k}$ , 則

$$\begin{aligned} \iint_{S_1} (\vec{F} \cdot \vec{n}) dA &= \iint_{S_1} \{(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \cdot (-\vec{k})\} dA \\ &= - \iint_{S_1} z dA = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

將 (2)、(3) 兩式代回 (1) 中可得

$$\iint_S (\vec{F} \cdot \vec{n}) dA = 2\pi - 0 = 2\pi$$

5. 求出微分方程式  $y'' + 9y = x \cos x$  的通解。(10分)

《喻超凡, 喻超弘 95 電力、電子、醫工高考》

《解》



(1) 齊次解：令  $y = e^{mx}$  代回 ODE 中可得

$$m^2 + 9 = 0 \Rightarrow m = \pm 3i$$

故

$$y_h(x) = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x$$

(2) 特解：

$$\begin{aligned} y_p(x) &= \frac{1}{D^2 + 9} x \cos x \\ &= x \frac{1}{D^2 + 9} \cos x - \frac{2D}{(D^2 + 9)^2} \cos x \\ &= \frac{x}{8} \cos x + \frac{1}{32} \sin x \end{aligned}$$

(3) 通解：  $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$

## 乙、測驗題部分 (50分)

1.  $i = \sqrt{-1}$ ，下列那一級數 (series) 收斂？

(A)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$    (B)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}$    (C)  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$    (D)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$

《喻超凡，喻超弘 95 電力、電子、醫工高考》

《解》☞ (B)；因

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n} &= i - \frac{1}{2} - \frac{i}{3} + \frac{1}{4} + \frac{i}{5} + \cdots \\ &= i\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots\right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots\right) \\ &= i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n} \end{aligned}$$

因  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$ 、 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n}$  均為收斂的交錯級數，故  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}$  收斂。

2. 有一個平面包含  $\vec{B} = \vec{j} - \vec{k}$  及  $\vec{C} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$  兩個向量，求出向量  $\vec{A} = \vec{i} - 2\vec{k}$  與該平面法線的夾角應為何？

(A)  $\theta = \cos^{-1} 0$    (B)  $\theta = \cos^{-1} 1$    (C)  $\theta = \cos^{-1} \frac{4}{\sqrt{30}}$    (D)  $\theta = \cos^{-1} \frac{1}{\sqrt{30}}$

《喻超凡，喻超弘 95 電力、電子、醫工高考》

《解》☞ (C)；平面的法向量為

$$\vec{n} = \vec{B} \times \vec{C} = (\vec{j} - \vec{k}) \times (\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) = 2\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$$

故夾角為

$$\cos \theta = \frac{\vec{n} \cdot \vec{A}}{|\vec{n}| \cdot |\vec{A}|} = \frac{2\vec{i} - \vec{j} - \vec{k} \cdot \vec{i} - 2\vec{k}}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{30}}$$

3. 下列何組向量可成爲  $\mathbb{R}^2$  空間的單範正交基底 (orthonormal basis) ?

(A)  $\{(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})^T, (1, -1)^T\}$  (B)  $\{(-1/2, \sqrt{3}/2)^T, (\sqrt{3}/2, -1/2)^T\}$

(C)  $\{(1, 1)^T, (1, -1)^T\}$  (D)  $\{(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})^T, (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})^T\}$

《喻超凡, 喻超凡 95 電力、電子、醫工高考》

《解》 (D) ;

$$(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})^T \cdot (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})^T = 0$$

且

$$\|(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})^T\| = \|(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})^T\| = 1$$

4. 假設  $\vec{R}(t) = 2t\vec{i} - \cos(3t)\vec{j} + t^3\vec{k}$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , 求  $\vec{R}' = \frac{d\vec{R}}{dt}$  方向之單位向量爲何?

(A)  $\frac{2\vec{i} + 3\sin(3t)\vec{j} + 3t^2\vec{k}}{4 + 9\sin^2(3t) + 9t^4}$  (B)  $\frac{2\vec{i} + 3\sin(3t)\vec{j} + 3t^2\vec{k}}{\sqrt{4 + 9\sin^2(3t) + 9t^4}}$

(C)  $\frac{3\sin(3t)\vec{j} + 3t^2\vec{k}}{\sqrt{9\sin^2(3t) + 9t^4}}$  (D)  $\frac{2\vec{i} + 3\sin(3t)\vec{j} + 4t^2\vec{k}}{\sqrt{8 + 9\sin^2(3t) + 7t^4}}$

《喻超凡, 喻超凡 95 電力、電子、醫工高考》

《解》 (B) ;

$$\vec{R}'(t) = 2\vec{i} + 3\sin(3t)\vec{j} + 3t^2\vec{k}$$

故單位向量爲

$$\frac{\vec{R}'(t)}{|\vec{R}'(t)|} = \frac{2\vec{i} + 3\sin(3t)\vec{j} + 3t^2\vec{k}}{\sqrt{4 + 9\sin^2(3t) + 9t^4}}$$

5. 下列敘述何者正確？

- (A) 如果  $A$  是赫米特矩陣 (Hermitian matrix), 並且  $A^2 = I$ ,  $I$  是單位矩陣, 則  $A$  也是么正矩陣 (unitary matrix)
- (B) 赫米特矩陣的行列式值 (determinant) 不一定是實數 (real)。
- (C) 令  $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_i(M)$  表示矩陣  $M$  之所有特徵值 (eigenvalue) 的總和。現給予  $A$ 、 $B$  兩矩陣, 則  $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_i(A) + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_i(B) \neq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_i(A+B)$
- (D) 如果一個矩陣有重複的 (repeated) 特徵值, 則此矩陣無法對角化 (diagonalizable)
- 《喻超凡, 喻超弘 95 電力、電子、醫工高考》

《解》☞ (A) ;  $A$  為赫米特矩陣, 則  $A^* = A$ , 故

$$A^2 = AA = A^*A = I$$

則  $A$  為 unitary 矩陣

6. 試求微分方程式  $x^2 dy - 2y dx = -(y^2 + 2x) dy$  之通解, 其中  $c$  為任意常數。

(A)  $y = 2 \cos^{-1}(x/y) + c$     (B)  $y = 2 \cot^{-1}(x/y) + c$

(C)  $y = 2 \sec^{-1}(x/y) + c$     (D)  $y = 2 \tan^{-1}(x/y) + c$

《喻超凡, 喻超弘 95 電力、電子、醫工高考》

《解》☞ (D) ; 原式可改寫成

$$-2(y dx - x dy) + (x^2 + y^2) dy = 0 \Rightarrow -2 \frac{d(xy^{-1})}{y^{-2}} + (x^2 + y^2) dy = 0$$

即

$$-\frac{2}{1 + (\frac{x}{y})^2} d(\frac{x}{y}) + dy = 0$$

兩端積分可得

$$-2 \tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right) + y = c$$

7. 計算  $\oint_C \frac{\cosh z}{z^3} dz$  之值，其中  $C$  表示一個正方形，其邊緣通過點  $(\pm 2, 0)$  及  $(0, \pm 2)$ ，逆時鐘方向 (counterclockwise)。

(A)  $\pi$  (B) 0 (C)  $i2\pi$  (D)  $i\pi$

《喻超凡，喻超弘 95 電力、電子、醫工高考》

《解》☞ (D)；令  $f(z) = \frac{\cosh z}{z^3}$  則  $f(z)$  在  $C$  內具有  $z=0$  的 3 階 poles，且

$$\text{Res}f(0) = \frac{1}{2!} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d^2}{dz^2} z^3 f(z) = \frac{1}{2}$$

故

$$\oint_C \frac{\cosh z}{z^3} dz = 2\pi i \text{Res}f(0) = 2\pi i \frac{1}{2} = \pi i$$

8. 若一系統之轉移函數為  $G(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2}$ ，且輸入信號為  $x(t) = \sin 2t$ ，則輸出信號  $y(t)$  之拉氏轉換  $Y(s)$  為：

(A)  $\frac{s}{(s+1)(s+2)(s^2+2)}$  (B)  $\frac{2}{(s+1)(s+2)(s^2+2)}$

(C)  $\frac{s}{(s+1)(s+2)(s^2+4)}$  (D)  $\frac{2}{(s+1)(s+2)(s^2+4)}$

《喻超凡，喻超弘 95 電力、電子、醫工高考》

《解》☞ (D)；

$$\mathcal{L}\{y(t)\} = G(s)\mathcal{L}\{x(t)\} = \frac{2}{(s+1)(s+2)(s^2+4)}$$

9. 下列何者與  $\mathcal{L}\{f(t)u(t-a)\}$  相等，其中  $\mathcal{L}\{\cdot\}$  代表拉氏換 (Laplace transform)?

- (A)  $e^{-at} \mathcal{L}\{af(t)\}$  (B)  $e^{-at} \mathcal{L}\left\{\frac{df}{dt}\right\}$  (C)  $e^{-at} \mathcal{L}\{af(t-a)\}$   
 (D)  $e^{-at} \mathcal{L}\{f(t+a)\}$  **《喻超凡, 喻超弘 95 電力、電子、醫工高考》**

《解》 (D) ;  $\mathcal{L}\{f(t)u(t-a)\} = e^{-at} \mathcal{L}\{f(t+a)\}$

10. 若微分方程式  $y'' - 4y' + 4y = 25 \sin x$  且  $y(0) = 3$ 、 $y'(0) = 2$ ，試求其解？

- (A)  $y = e^{2x} + 2xe^{2x} + \cos x$  (B)  $y = 3e^{2x} - 5xe^{2x} + \sin x$   
 (C)  $y = 2e^{2x} + 2xe^{2x} + \cos x + \sin x$  (D)  $y = -e^{2x} + xe^{2x} + 3 \sin x + 4 \cos x$   
**《喻超凡, 喻超弘 95 電力、電子、醫工高考》**

《解》 (D) ; 齊次解：令  $y = e^{mx}$  代回 ODE 中可得

$$m^2 - 4m + 4 = 0 \Rightarrow m = 2, 2$$

故

$$y_h(x) = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}$$

特解

$$\begin{aligned} y_p(x) &= \frac{1}{D^2 - 4D + 4} 25 \sin x \\ &= 25 \frac{4D + 3}{-(4D - 3)(4D + 3)} \sin x \\ &= 25 \frac{4D + 3}{-(16D^2 - 9)} \sin x \\ &= (4 \cos x + 3 \sin x) \end{aligned}$$

通解

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} + 4 \cos x + 3 \sin x$$

再由

$$\begin{cases} y(0) = 3 = c_1 + 4 \\ y'(0) = 2 = 2c_1 + c_2 + 3 \end{cases} \Rightarrow c_1 = -1, c_2 = 1$$

故

$$y(x) = -e^{2x} + xe^{2x} + 3 \sin x + 4 \cos x$$

11. 下列那一函數滿足 Laplace 方程式  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$  ?

(A)  $u = \sin x \cos y$  (B)  $u = \tan^{-1}(y/x)$  (C)  $u = x^2 + y^2$  (D)  $u = \sinh x \cosh y$

《喻超凡, 喻超弘 95 電力、電子、醫工高考》

《解》☞ (B) ; 令  $x = r \cos \theta$ 、 $y = r \sin \theta$  , 故

$$\frac{y}{x} = \tan \theta \Rightarrow \theta = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

故  $u = \tan^{-1} \frac{y}{x} = \theta$  , 則

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0$$

12.  $f(t)$  是週期  $2\pi$  的函數, 在  $-\pi \leq t < \pi$  之間定義為  $f(t) = |t|$ 。將  $f(t)$  的傅立葉級數 (Fourier series) 表示成

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt)$$

求  $\frac{a_0}{2}$  之值為何?

(A)  $\pi/2$  (B)  $\pi$  (C)  $2\pi$  (D)  $4\pi$

《喻超凡, 喻超弘 95 電力、電子、醫工高考》

《解》☞ (A) ;

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} t dt = \frac{1}{\pi} \times \frac{t^2}{2} \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$$

13. 給定一個連續隨機變數  $X$ ，它的機率密度函數為  $f(x) = \begin{cases} 1/10 & , 0 \leq x < 10 \\ 0 & , \text{otherwise} \end{cases}$ ，  
則條件期望值  $E[X | X \leq 6]$  為何？  
(A) 3.0 (B) 5.0 (C) 6.0 (D) 10.8

《喻超凡，喻超弘 95 電力、電子、醫工高考》

《解》☞ (A)；

$$f(x | x \leq 6) = \frac{f(x, x \leq 6)}{P\{X \leq 6\}} = \frac{\frac{1}{10}}{\int_0^6 \frac{1}{10} dx} = \frac{1}{6} \quad (0 \leq x \leq 6)$$

故

$$E[X | X \leq 6] = \int_0^6 x f(x | x \leq 6) dx = \int_0^6 x \frac{1}{6} dx = \frac{1}{6} \times \frac{36}{2} = 3$$

14. 二維隨機變數  $X$  與  $Y$  的聯合機率密度函數 (joint probability density function) 為

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} xy & , 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2 \\ 0 & , \text{otherwise} \end{cases}$$

則  $X^2 + Y^2 < 1$  的機率為何？

- (A) 1/16 (B) 1/8 (C) 3/16 (D) 1/4

《喻超凡，喻超弘 95 電力、電子、醫工高考》

《解》☞ (B)；

$$\begin{aligned} P\{X^2 + Y^2 < 1\} &= \iint_{x^2 + y^2 < 1} f_{X,Y}(x, y) dx dy \\ &= \int_{\theta=0}^{r=\frac{\pi}{2}} \int_{r=0}^{r=1} (r \cos \theta)(r \sin \theta)r dr d\theta \\ &= \frac{1}{8} \end{aligned}$$



15.  $\mathcal{L}\{\cdot\}$  代表拉氏轉換 (Laplace transform), 令  $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+1)}\right\}$ , 則  $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$  等於多少?
- (A) 0 (B)  $1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$  (C) 1 (D) 2

《喻超凡, 喻超弘 95 電力、電子、醫工高考》

《解》☞ (C);

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+1)}\right\} = \int_0^t \sin t dt = (1 - \cos t)$$

$$\text{故 } f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

16. 令  $P_n$  為所有次數小於  $n$  之多項式集合,  $C^n[a, b]$  為所有可  $n$  次微分之函數  $f(x)$ ,  $x \in [a, b]$  所成的集合。  $\mathbb{R}^n$  表示  $n$  維實數向量,  $\mathbb{R}^{n \times n}$  表示  $n$  階實數矩陣。則下列敘述何者正確?

- (A)  $(1, 1, 0)^T$ ,  $(1, 0, -1)^T$ ,  $(1, -1, 2)^T$  在  $\mathbb{R}^3$  線性相依 (linearly dependent)
- (B)  $x^2$ ,  $x|x|$ , 此二向量在  $C^1[-1, 1]$  線性相依。
- (C)  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$  在  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$  線性獨立 (linearly independent)。
- (D)  $x+1$ ,  $x+2$ ,  $x^2-1$  在  $P_3$  線性獨立。

《喻超凡, 喻超弘 95 電力、電子、醫工高考》

《解》☞ (D);

$$W(x+1, x+2, x^2-1) = \begin{vmatrix} x+1 & x+2 & x^2-1 \\ 1 & 1 & 2x \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

故  $x+1$ ,  $x+2$ ,  $x^2-1$  在  $P_3$  為線性獨立。