

公職教師工程數學

95-101 歷試詳解

勘誤檔案

喻超凡 喻超弘編著



喻超凡數位企業有限公司

版權所有 翻印必究

$$\begin{aligned}
&= 2 \int_0^a \cos wx \, dx = 2 \frac{\sin wx}{w} \Big|_0^a \\
&= \frac{2 \sin wa}{w}
\end{aligned}$$

(2) 因

$$\begin{aligned}
F(x) &= \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{2 \sin wa}{w} \right\} \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2 \sin wa}{w} e^{iwx} \, dw \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin wa}{w} (\cos wx + i \sin wx) \, dw \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin wa \cos wx}{w} \, dw
\end{aligned}$$

即

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin wa \cos wx}{w} \, dw = \begin{cases} \pi & ; |x| < a \\ 0 & ; |x| > a \\ \frac{\pi}{2} & ; x = \pm a \end{cases}$$

(3)

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin wa}{w} \, dw = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin wa}{w} \, dw = \frac{1}{2} \pi F(0) = \frac{\pi}{2}$$

3. 令矩陣 $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$, 試求

(1) A 之特徵值 (eigenvalues) (3分)

(2) A 之特徵向量 (eigenvectors) (3分)

(3) 計算 $e^{-A} = ?$ (4分)

《喻超凡, 喻超弘 95 電力、電子、醫工高考》

《解》

(1) 由 $\det(A - \lambda I) = 0$, 可得 A 的特徵值為 $\lambda = 4, -3$ 。

(2) 將 $\lambda = 4$ 代回 $(A - \lambda I)X = 0$ 中可得

$$\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

可得對應的特徵向量爲

$$X = c_1 \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} \quad (c_1 \neq 0)$$

將 $\lambda = -3$ 代回 $(A - \lambda I)X = 0$ 中可得

$$\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

可得對應的特徵向量爲

$$X = c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (c_2 \neq 0)$$

(3) 令

$$e^{-A} = aA + bI$$

將 $\lambda = 4, -3$ 代入上式, 可得

$$\begin{cases} e^{-4} = 4a + b \\ e^3 = -3a + b \end{cases}$$

故

$$a = \frac{1}{7}(e^{-4} - e^3), \quad b = \frac{1}{7}(3e^{-4} + 4e^3)$$

則

$$e^{-A} = \frac{1}{7}(e^{-4} - e^3)A + \frac{1}{7}(3e^{-4} + 4e^3)I$$

4. 有一表面 S 如下 $S: x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0$, 假設有一向量函數爲

$\vec{F}(x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, 請計算 $\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{A}$ 之值。(10分)

《喻超凡, 喻超弘 95 電力、電子、醫工高考》

5. 下列敘述何者正確？

- (A) 如果 A 是赫米特矩陣 (Hermitian matrix), 並且 $A^2 = I$, I 是單位矩陣, 則 A 也是么正矩陣 (unitary matrix)
- (B) 赫米特矩陣的行列式值 (determinant) 不一定是實數 (real)。
- (C) 令 $\sum_{i=1}^n \lambda_i(M)$ 表示矩陣 M 之所有特徵值 (eigenvalue) 的總和。現給予 A 、 B 兩矩陣, 則 $\sum_{i=1}^n \lambda_i(A) + \sum_{i=1}^n \lambda_i(B) \neq \sum_{i=1}^n \lambda_i(A+B)$
- (D) 如果一個矩陣有重複的 (repeated) 特徵值, 則此矩陣無法對角化 (diagonalizable)

《喻超凡, 喻超弘 95 電力、電子、醫工高考》

《解》☞ (A) ; A 為赫米特矩陣, 則 $A^* = A$, 故

$$A^2 = AA = A^*A = I$$

則 A 為 unitary 矩陣

6. 試求微分方程式 $x^2 dy - 2y dx = -(y^2 + 2x) dy$ 之通解, 其中 c 為任意常數。

- (A) $y = 2 \cos^{-1}(x/y) + c$ (B) $y = 2 \cot^{-1}(x/y) + c$
- (C) $y = 2 \sec^{-1}(x/y) + c$ (D) $y = 2 \tan^{-1}(x/y) + c$

《喻超凡, 喻超弘 95 電力、電子、醫工高考》

《解》☞ (D) ; 原式可改寫成

$$-2(y dx - x dy) + (x^2 + y^2) dy = 0 \Rightarrow -2 \frac{d(xy^{-1})}{y^{-2}} + (x^2 + y^2) dy = 0$$

即

$$-\frac{2}{1 + (\frac{x}{y})^2} d(\frac{x}{y}) + dy = 0$$

9. 下列何者與 $\mathcal{L}\{f(t)u(t-a)\}$ 相等，其中 $\mathcal{L}\{\cdot\}$ 代表拉氏換 (Laplace transform)?

(A) $e^{-as}\mathcal{L}\{af(t)\}$ (B) $e^{-as}\mathcal{L}\{\frac{df}{dt}\}$ (C) $e^{-as}\mathcal{L}\{af(t-a)\}$

(D) $e^{-as}\mathcal{L}\{f(t+a)\}$ 《喻超凡, 喻超弘 95 電力、電子、醫工高考》

《解》☞ (D) ; $\mathcal{L}\{f(t)u(t-a)\} = e^{-as}\mathcal{L}\{f(t+a)\}$

10. 若微分方程式 $y'' - 4y' + 4y = 25 \sin x$ 且 $y(0) = 3$ 、 $y'(0) = 2$ ，試求其解？

(A) $y = e^{2x} + 2xe^{2x} + \cos x$ (B) $y = 3e^{2x} - 5xe^{2x} + \sin x$

(C) $y = 2e^{2x} + 2xe^{2x} + \cos x + \sin x$ (D) $y = -e^{2x} + xe^{2x} + 3 \sin x + 4 \cos x$

《喻超凡, 喻超弘 95 電力、電子、醫工高考》

《解》☞ (D) ; 齊次解：令 $y = e^{mx}$ 代回 ODE 中可得

$$m^2 - 4m + 4 = 0 \Rightarrow m = 2, 2$$

故

$$y_h(x) = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}$$

特解

$$\begin{aligned} y_p(x) &= \frac{1}{D^2 - 4D + 4} 25 \sin x \\ &= 25 \frac{4D + 3}{-(4D - 3)(4D + 3)} \sin x \\ &= 25 \frac{4D + 3}{-(16D^2 - 9)} \sin x \\ &= (4 \cos x + 3 \sin x) \end{aligned}$$

通解

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} + 4 \cos x + 3 \sin x$$

2.95年地方政府電力、電子工程三等考試

甲、申論題部分 (50分)

1. 求出下列微分方程式的解： $2x - y \sin(xy) + \{3y^2 - x \sin(xy)\}y' = 0$ ； $y(0) = 2$
(其中 $y' = \frac{dy}{dx}$)。(15分) **《喻超凡, 喻超弘 95地方特考電力、電子工程》**

《解》☞ 原式可改寫成

$$\{2x - y \sin(xy)\}dx + \{3y^2 - x \sin(xy)\}dy = 0$$

即

$$d\{x^2 + \cos(xy) + y^3\} = 0$$

故 ODE 的通解為

$$x^2 + \cos(xy) + y^3 = c$$

由 $y(0) = 2$ ，可得 $1 + 2^3 = c$ ，則 $c = 9$ ，故 ODE 的特解為

$$x^2 + \cos(xy) + y^3 = 9$$

2. 若矩陣 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

- (1) 請計算 $(I - A)^{-1} = ?$ (5分)
- (2) 請計算 $A^2 + A^3 = ?$ (5分)
- (3) 請證明 $(I - A)^{-1} = I + A + A^2$ 。(5分)

《喻超凡, 喻超弘 95地方特考電力、電子工程》

《解》☞

《解》☞ (C) ; 因 $v(x, y)$ 為 $u(x, y)$ 的調和共軛, 則

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 2x \Rightarrow v(x, y) = 2xy + f_1(x)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = 2y \Rightarrow v(x, y) = 2xy + f_2(y)$$

比較兩式可得

$$v(x, y) = 2xy + c$$

13. C 為任意一簡單封閉曲線, 而 z_0 為一在 C 內之點, 則下列何者正確?

(A) $\oint_C dz = 2\pi i$ (B) $\oint_C z dz = 2\pi i$ (C) $\oint_C (z - z_0) dz = 2\pi i$

(D) $\oint_C (z - z_0)^{-1} dz = 2\pi i$ 《喻超凡, 喻超弘 95 地方特考電力、電子工程》

《解》☞ (D) ; 令 $f(z) = \frac{1}{z - z_0}$, 故 $f(z)$ 在 C 內具有 $z = z_0$ 的一階 pole, 且

$$\text{Res}f(z_0) = 1$$

故

$$\oint_C \frac{1}{z - z_0} dz = 2\pi i \text{Res}f(z_0) = 2\pi i$$

14. 假設 $f(x)$ 為週期性函數, 週期為 4, $f(x)$ 定義如下, 求出傅立葉級數

$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{2}$ 中 b_n 項為何? $f(x) = \begin{cases} -1 & ; -2 < x < -1 \\ 0 & ; -1 < x < 1 \\ 1 & ; 1 < x < 2 \end{cases}$

(A) $\frac{1}{n\pi}(\cos \frac{n\pi}{2} + \cos n\pi)$ (B) $\frac{1}{n\pi}(\cos \frac{n\pi}{2} - \cos n\pi)$

(C) $\frac{2}{n\pi}(\cos \frac{n\pi}{2} + \cos n\pi)$ (D) $\frac{2}{n\pi}(\cos \frac{n\pi}{2} - \cos n\pi)$

《喻超凡, 喻超弘 95 地方特考電力、電子工程》

19. 從 1 到 1000 的整數中隨意任選一個數字，求這個數字可以被 4 或是 7 或是 9 整除的機率為何？

(A) 0.583 (B) 0.503 (C) 0.429 (D) 0.406

《喻超凡，喻超弘 95 地方特考電力、電子工程》

《解》 (C)；令 $[\cdot]$ 表示最大整數函數，故機率為

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1000} \left\{ \left[\frac{1000}{4} \right] + \left[\frac{1000}{7} \right] + \left[\frac{1000}{9} \right] - \left[\frac{1000}{4 \times 7} \right] - \left[\frac{1000}{4 \times 9} \right] - \left[\frac{1000}{7 \times 9} \right] + \left[\frac{1000}{4 \times 7 \times 9} \right] \right\} \\ &= \frac{1}{1000} (250 + 142 + 111 - 35 - 27 - 15 + 3) = 0.429 \end{aligned}$$

20. 假設 X 是柏松分配 (Poisson distribution)，其機率函數為 $P(X = k) = \frac{e^{-a} a^k}{k!}$ ， $a > 0$ ，若 $P(X = 2) = 2 P(X = 1)/3$ ，則 $P(X = 0)$ 為：

(A) $e^{-1/4}$ (B) $e^{-3/4}$ (C) $e^{-1/3}$ (D) $e^{-4/3}$

《喻超凡，喻超弘 95 地方特考電力、電子工程》

《解》 (D)；由 $P(X = 2) = \frac{2}{3} P(X = 1)$ ，可得

$$\frac{e^{-a} a^2}{2!} = \frac{2 e^{-a} a}{3 \cdot 1!} \Rightarrow a = \frac{4}{3}$$

故

$$P(X = 0) = \frac{e^{-4/3} \left(\frac{4}{3}\right)^0}{0!} = e^{-4/3}$$

可得

$$E[XY] = \mathbf{Cov}(X, Y) + E[X]E[Y] = 0.8 + 1 \times 2 = 2.8$$

(2)

$$E[W] = E[X + 3Y] = E[X] + 3E[Y] = 1 + 3 \times 2 = 7$$

(3)

$$E[W^2] = E[(X + 3Y)^2] = E[X^2 + 6XY + 9Y^2] = E[X^2] + 6E[XY] + 9E[Y^2] \quad (1)$$

因

$$E[X^2] = \sigma_X^2 + (E[X])^2 = 4 + 1 = 5$$

$$E[Y^2] = \sigma_Y^2 + (E[Y])^2 = 1 + 2^2 = 5$$

代回 (1) 式可得

$$E[W^2] = 5 + 6 \times 2.8 + 9 \times 5 = 66.8$$

因此

$$\mathbf{Var}(W) = E[W^2] - (E[W])^2 = 66.8 - 7^2 = 17.8$$

(4)

$$\begin{aligned} E[WU] &= E[(X + 3Y)(-X + 2Y)] \\ &= E[-X^2 - XY + 6Y^2] \\ &= -E[X^2] - E[XY] + 6E[Y^2] \\ &= -5 - 2.8 + 6 \times 5 \\ &= 22.2 \end{aligned}$$

16. 有一週期函數 $f(x) = e^x$ ，其中 $-\pi < x < \pi$ ，且 $f(x + 2\pi) = f(x)$ ，求其

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx = ?$$

(A) $\frac{\sinh \pi}{\pi} (-1)^n \frac{1+in}{1+n^2}$ (B) $\frac{\sinh \pi}{\pi} (-1)^n \frac{1+in}{n^2}$ (C) $\frac{\sinh \pi}{2\pi} (-1)^n \frac{1+in}{1+n^2}$

(D) $\frac{\sinh \pi}{2\pi} (-1)^n \frac{1+in}{n^2}$

《喻超凡，喻超弘 96 電力、電子高考》

《解》☞ (A)；

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^x e^{-inx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \left. \frac{e^x e^{inx}}{1-in} \right|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2\pi} \frac{e^{\pi} e^{in\pi} - e^{-\pi} e^{-in\pi}}{1-in} \\ &= \frac{1}{\pi} \sinh \pi (-1)^n \frac{1+in}{1+n^2} \end{aligned}$$

17. 下列何者為 $(\cos y + y \cos x)dx + (\sin x - x \sin y)dy = 0$ 之解？

(A) $y \cos x + x \sin y = c$ (B) $x \cos y + y \sin x = c$

(C) $x \cos x + y \sin y = c$ (D) $y \cos y + x \sin x = c$

《喻超凡，喻超弘 96 電力、電子高考》

《解》☞ (B)；原式可改寫成

$$d(x \cos y + y \sin x) = 0$$

ODE 的通解為

$$x \cos y + y \sin x = c$$

2.96年地方政府電力、電子、電信工程三等考試

甲、申論題部分 (50分)

1. 若 y_1 、 y_2 是 $\ddot{y} + P(x)\dot{y} + Q(x)y = 0$ 的兩個解，試證明 (10分)

$$W = y_1\dot{y}_2 - y_2\dot{y}_1 = k \exp\left\{-\int P(x) dx\right\}$$

《喻超凡，喻超弘 96 地方特考電力、電子、電信工程》

《解》因 $y_1(x)$ 、 $y_2(x)$ 為

$$y''(x) + P(x)y'(x) + Q(x)y(x) = 0$$

特解，則

$$y_1''(x) + P(x)y_1'(x) + Q(x)y_1(x) = 0 \quad (1)$$

$$y_2''(x) + P(x)y_2'(x) + Q(x)y_2(x) = 0 \quad (2)$$

(1) $\times y_2(x)$ - (2) $\times y_1(x)$ 可得

$$\{y_1''(x)y_2(x) - y_2''(x)y_1(x)\} + P(x)\{y_1'(x)y_2(x) - y_2'(x)y_1(x)\} = 0 \quad (3)$$

因 $y_1(x)$ 、 $y_2(x)$ 的 Wronskian 行列式為

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x) \quad (4)$$

且

$$W'(y_1, y_2) = \{y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x)\}' = y_1(x)y_2''(x) - y_2(x)y_1''(x) \quad (5)$$

(4)、(5) 兩式代回 (3) 式可得

$$W'(y_1, y_2) + P(x)W(y_1, y_2) = 0 \quad (4)$$

利用分離變數法，可解得 (4) 式的解為

$$W(y_1, y_2) = k \exp\left\{-\int P(x) dx\right\} \quad ; \quad (k \text{ 為常數}) \quad (5)$$

其中 $\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s)$ ，整理可得

$$(s^2 + 4)Y(s) = \frac{3s + 1}{s^2} e^{-3s}$$

即

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{3s + 1}{s^2(s^2 + 4)} e^{-3s} \\ &= \left\{ \frac{1}{4s^2} + \frac{3}{4s} - \frac{3s + 1}{4(s^2 + 4)} \right\} e^{-3s} \end{aligned}$$

故

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \left\{ \frac{t-3}{4} + \frac{3}{4} - \frac{3}{4} \cos 2(t-3) - \frac{1}{8} \sin 2(t-3) \right\} H(t-3)$$

4. (1) 計算 $\oint_C \frac{e^z}{z(z+1)} dz$ ，其中 C 為圓 $|z-1|=3$ ， z 為複變數。(5分)

(2) 計算 $\oint_C \frac{5z^2 - 3z + 2}{(z-1)^3} dz$ ，其中 C 為包圍 $z=1$ 的任意封閉曲線。(5分)

《喻超凡，喻超弘 96 地方特考電力、電子、電信工程》

《解》

(1) 令 $f(z) = \frac{e^z}{z(z+1)}$ ，則 $f(z)$ 在 C 內具有 $z=0$ 、 $z=-1$ 的一階 poles，且

$$\text{Res}f(0) = \frac{e^z}{(z+1)} \Big|_{z=0} = 1$$

$$\text{Res}f(-1) = \frac{e^z}{z} \Big|_{z=-1} = -\frac{1}{e}$$

故

$$\oint_C \frac{e^z}{z(z+1)} dz = 2\pi i \{ \text{Res}f(0) + \text{Res}f(-1) \} = 2\pi i \left\{ 1 - \frac{1}{e} \right\}$$

(2) 令 $g(z) = \frac{5z^2 - 3z + 2}{(z-1)^3}$ ，則 $g(z)$ 在 C 內具有 $z=1$ 的 3 階 pole，且

$$\text{Res}g(1) = \frac{1}{2!} \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d^2}{dz^2} (z-1)^3 g(z) = \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d^2}{dz^2} (5z^2 - 3z + 2) = 5$$

故

$$\oint_C \frac{5z^2 - 3z + 2}{(z-1)^3} dz = 2\pi i \text{Res}g(1) = 2\pi i \times 5 = 10\pi i$$

4. 將函數 $\frac{1}{z^3 - z^4}$ 以 Laurent 級數展開得 $\frac{1}{z^3 - z^4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{z^{n+4}}$, 其收斂區間為 :

- (A) $|z| > 0$ (B) $0 < |z| < 1$ (C) $|z| > 1$ (D) $z \in \mathbb{C}$

《喻超凡, 喻超弘 96 地方特考電力、電子、電信工程》

《解》☞ (C) ; 因

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{-1}{z^{n+5}}}{\frac{-1}{z^{n+4}}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{z} \right| < 1$$

級數收斂, 故可得 $|z| > 1$ 。

5. 試求反拉氏轉換 (inverse Laplace Transform) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s+2}{\{(s+1)^2+1\}^2}\right\}$ 。

- (A) $e^{-t}t \cos t - e^{-t}(\cos t - t \sin t)$ (B) $\frac{3}{2}e^{-t}t \sin t - \frac{1}{2}e^{-t}(\sin t - t \cos t)$
 (C) $e^{-t} \sin t - e^{-t}(\sin t - t \cos t)$ (D) $t \sin t - (\sin t - t \cos t)$

《喻超凡, 喻超弘 96 地方特考電力、電子、電信工程》

《解》☞ (B) ; 因 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+a^2}\right\} = \cos at$, 兩端對 a 微分, 可得

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-2as}{(s^2+a^2)^2}\right\} = -t \sin at$$

故

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+a^2)^2}\right\} = \frac{t}{2a} \sin at$$

因 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+a^2}\right\} = \frac{1}{a} \sin at$, 兩端對 a 微分, 可得

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-2a}{(s^2+a^2)^2}\right\} = -\frac{1}{a^2} \sin at + \frac{t}{a} \cos at$$

《解》 (B) ; 設 λ_1 、 λ_2 為 A 的特徵值, 故

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = \text{tr}(A) = 10 \\ \lambda_1 \lambda_2 = \det(A) = 24 \end{cases}$$

則 A 的特徵方程式為

$$\lambda^2 - 10\lambda + 24 = 0$$

因此 $\lambda_1 = 4$ 、 $\lambda_2 = 6$

10. 下列敘述何者正確?

- (A) 如果 Q 是一個正交矩陣 (orthogonal matrix), λ 是 Q 的一個特徵值 (eigenvalue), 則 $|\lambda| = 1$
- (B) 如果向量 x 與向量 y 互相正交 (orthogonal), 並且 $P = A(A^T A)^{-1} A^T$ 是一個投影矩陣 (projection matrix), $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 則 Px 與 Py 互相正交
- (C) 如果矩陣 B 是由矩陣 A 交換其中二列 (row) 所形成, 則 B 相似 (similar) 矩陣 A
- (D) 矩陣 A 與矩陣 A^T 具有相同的特徵值 (eigenvalue) 與特徵向量 (eigenvector)

《喻超凡, 喻超弘 96 地方特考電力、電子、電信工程》

《解》 (A) ; 因 Q 為正交矩陣, 故 $Q^T Q = Q^* Q = I$, 且令 λ 為 Q 的特徵值, 且對應的特徵向量為 X , 則 $QX = \lambda X$, 故

$$(QX)^* = (\lambda X)^* \Rightarrow X^* Q^* = \bar{\lambda} X^*$$

$$X^* Q^* (QX) = \bar{\lambda} X^* (\lambda X) \Rightarrow X^* (Q^* Q) X = |\lambda|^2 X^* X$$

$$X^* X = |\lambda|^2 X^* X \Rightarrow (1 - |\lambda|^2) X^* X = 0$$

因 $X^* X = \|X\|^2 \neq 0$, 故 $|\lambda|^2 - 1 = 0$, 即 $|\lambda| = 1$ 。

11. 令 $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$, 則下列何組之向量可構成矩陣 A^T 的值域空間 (range space)?

- (A) $\{(1, 0)^T, (0, 1)^T\}$ (B) $\{(1, -2), (0, 1)\}$ (C) $\{(-1, 0, 1)^T, (0, 1, 1)^T\}$
- (D) $\{(1, 0, -2)^T, (0, 1, 1)^T\}$

《喻超凡, 喻超弘 96 地方特考電力、電子、電信工程》

《解》 (D) ; $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_{12}^{(-2)}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2^{(-1/2)}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$$\xrightarrow{R_{21}^{(-3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

故 A^T 的值域空間基底為 $\{(1, 0, -2)^T, (0, 1, 1)^T\}$

12. 假設一個無窮複數級數 (infinite series) 之和為 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = S$, 則 $\sum_{n=1}^{\infty} \bar{z}_n$ 之值應為何? 其中 $\bar{z}$ 表示 z 的共軛複數 (complex conjugate) 。

(A) 0 (B) $\bar{S}$ (C) iS (D) $-S$

《喻超凡, 喻超弘 96 地方特考電力、電子、電信工程》

《解》 (B) ; $\sum_{n=1}^{\infty} \bar{z}_n = \overline{\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} z_n \right\}} = \bar{S}$

13. 令 $\vec{v}$ 為一常數向量, 而 $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, 則 $\nabla \cdot (\vec{u} - \vec{v})$ 等於多少?

(A) 0 (B) 1 (C) 3 (D) $\|\vec{v}\|$

《喻超凡, 喻超弘 96 地方特考電力、電子、電信工程》

《解》 (C) ; $\nabla \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \nabla \cdot \vec{u} = 3$

14. 令 C 表示一個從 $z = i$ 至 $z = 1$ 的線段, $M = \left| \int_C \frac{dz}{z^4} \right|$, 則 M 之最小上界 (least upper bound) 為何?

(A) $2\sqrt{2}$ (B) $4\sqrt{2}$ (C) 8 (D) $8\sqrt{2}$

《喻超凡, 喻超弘 96 地方特考電力、電子、電信工程》

《解》 (B) ; 因 C 的方程式為 $x + y = 1$, 故 C 上的 $z = x + iy = x + i(1 - x)$, $(0 \leq x \leq 1)$,

17. 若 $y_1 = e^x$ 是微分方程式 $(1 - 2x)\ddot{y} + 2\dot{y} + (2x - 3)y = 0$ 的一解，試求此微分方程式之通解，其中 c, k 為任意實數。

- (A) $y = ce^x + kxe^{-x}$ (B) $y = c \ln x + kx \ln x$ (C) $y = ce^{-x} + kxe^x$
 (D) $y = c \ln x - kx \ln x$ 《喻超凡，喻超弘 96 地方特考電力、電子、電信工程》

《解》 (A) ; ODE 的另外一個線性獨立的解為

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1 \int \frac{e^{-\int \frac{2}{1-2x} dx}}{y_1^2} dx \\ &= e^x \int \frac{e^{\ln|2x-1|}}{e^{2x}} dx \\ &= e^x \int (2x-1)e^{-2x} dx \\ &= e^x \left\{ -\frac{1}{2}(2x-1)e^{-2x} - \frac{1}{2}e^{-2x} \right\} \\ &= -xe^{-x} \end{aligned}$$

故 ODE 的通解為

$$y(x) = c_1 e^x + kx e^{-x}$$

18. 定義函數 $f(t)$ 的傅利葉轉換 (Fourier transform) 為 $F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iwt} dt$ ，其中 $i = \sqrt{-1}$ 。求 $f(t) \cos(w_0 t)$ 的傅利葉轉換為何？

- (A) $\frac{1}{2}\{F(w+w_0) - F(w-w_0)\}$ (B) $\frac{1}{2}\{F(w+w_0) + F(w-w_0)\}$
 (C) $\frac{1}{2i}\{F(w+w_0) - F(w-w_0)\}$ (D) $\frac{1}{2i}\{F(w+w_0) + F(w-w_0)\}$

《喻超凡，喻超弘 96 地方特考電力、電子、電信工程》

《解》 (B) ;

$$\mathcal{F}\{f(t) \cos(w_0 t)\} = \mathcal{F}\left\{f(t) \frac{e^{iw_0 t} + e^{-iw_0 t}}{2}\right\} = \frac{1}{2}\{F(w+w_0) + F(w-w_0)\}$$

19. 求原點到平面 $4x + 2y + 4z = 12$ 的距離為何？

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

《喻超凡, 喻超弘 96 地方特考電力、電子、電信工程》

《解》 (B) ;

$$d = \left| \frac{4 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 4 \cdot 0 - 12}{\sqrt{4^2 + 2^2 + 4^2}} \right| = 2$$

20. 試問微分方程式 $xy' = y - 5$, $y(0) = 5$, 有幾個解？

(A) 無解 (B) 無限多解 (C) 恰有一解 (D) 有限多解

《喻超凡, 喻超弘 96 地方特考電力、電子、電信工程》

《解》 (B) ; 原式可改寫成

$$\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y = -\frac{5}{x}$$

積分因子為

$$I = \exp\left\{\int \left(-\frac{1}{x}\right) dx\right\} = \exp\{-\ln x\} = \frac{1}{x}$$

故

$$Iy = \int \frac{1}{x} \left(-\frac{5}{x}\right) dx = \frac{5}{x} + c$$

故

$$y(x) = 5 + cx$$

由 $y(0) = 5$, 則 c 為任意數, 故 ODE 具有無窮多組解。

4. 令 X 和 Y 是兩個獨立的隨機變數，其機率密度函數 (probability density function) 分別表示為 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$ 。令隨機變數 Z 定義如下： $Z = X + Y$

(1) 證明隨機變數 Z 的機率密度函數 $f_Z(z)$ 和 $f_X(x)$ 與 $f_Y(y)$ 間具有下面的關係

$$f_Z(z) = f_X(x) * f_Y(y)$$

其中 “*” 意指褶積 (convolution operation)。(5分)

(2) 假設 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$ 的表示如下

$$f_X(x) = \frac{1}{a} \{u(x) - u(x-a)\}$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{b} \{u(y) - u(y-b)\}$$

其中 $0 < a < b$ ，而 $u(*)$ 代表單位步階函數 (unit-step function)。求算隨機變數 Z 的機率密度函數 $f_Z(z)$ ，並繪圖表示之。(10分)

《喻超凡，喻超弘 97 電力、電子、醫工高考》

《解》

(1) 因 X 、 Y 為兩個獨立的隨機變數，故隨機變數 X 、 Y 的聯合機率密度函數為

$$f_{XY}(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$$

因 $Z = X + Y$ ，故隨機變數 X 、 Z 的聯合機率密度函數為

$$f_{XZ}(x, z-x) = f_X(x)f_Y(z-x)$$

則

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XZ}(x, z-x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)f_Y(z-x) dx = f_X(z) * f_Y(z)$$

(2) 因

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)f_Y(z-x) dx$$

(a) $0 \leq z < a$

$$f_Z(z) = \int_0^z \frac{1}{a} \times \frac{1}{b} dx = \frac{1}{ab} x \Big|_0^z = \frac{z}{ab}$$

(b) $a \leq z < b$

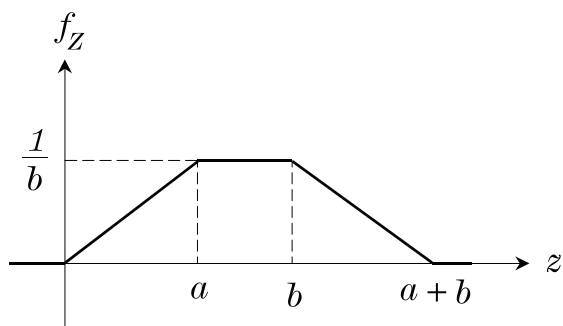
$$f_Z(z) = \int_{z-a}^z \frac{1}{a} \times \frac{1}{b} dx = \frac{1}{ab} x \Big|_{z-a}^z = \frac{a}{ab} = \frac{1}{b}$$

(c) $b \leq z < b+a$

$$f_Z(z) = \int_{z-a}^b \frac{1}{a} \times \frac{1}{b} dx = \frac{1}{ab} x \Big|_{z-a}^b = \frac{1}{ab}(b+a-z)$$

(d) 其他 $f_Z(z) = 0$

(e) 圖



14. 令 A 與 B 皆為 3×3 的矩陣 (matrix), 現已知 A 的行列式 (determinant) 值是 2, B 的行列式值是 5, 且 $\Delta = 3AB$ 。則 Δ 的行列式值是:

- (A) 30 (B) 90 (C) 180 (D) 270

《喻超凡, 喻超凡 97 電力、電子、醫工高考》

《解》 (D);

$$\det(\Delta) = \det(3AB) = 3^3 \times \det(A) \det(B) = 27 \times 2 \times 5 = 270$$

15. 下列敘述何者正確?

- (A) 如果矩陣 $AB = 0$, 則矩陣 $A = 0$, 或矩陣 $B = 0$, 或 $A = B = 0$
 (B) 如果矩陣 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 的第一列 (row) 與第三列相同, 則矩陣 AB 的第一列與第三列也相同, 其中 $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$
 (C) 如果矩陣 $A \neq 0$, 矩陣 $B \neq 0$, 矩陣 $C \neq 0$, 並且 $AC = BC$, 則 $A = B$
 (D) 如果矩陣 A , 矩陣 B 皆為對稱矩陣 (symmetric matrix), 則 AB 也是對稱矩陣

《喻超凡, 喻超凡 97 電力、電子、醫工高考》

《解》 (B); 令

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix}$$

其中 $A_1, A_2, \dots, A_m$ 為 A 的列向量, 故

$$AB = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} A_1 B \\ A_2 B \\ A_3 B \\ \vdots \\ A_m B \end{bmatrix}$$

代回 ODE 中可得

$$3 \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} e^{3t} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} e^{3t} \right\} + \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} e^{3t}$$

比較係數可得

$$\begin{cases} 3a + 3b + 8 = 0 \\ a + 5b = 0 \end{cases} ; \begin{cases} 3c = 3c + 3d \\ 3d = c + 5d + 4 \end{cases}$$

可解得 $a = -\frac{10}{3}$ 、 $b = \frac{2}{3}$ 、 $c = -4$ 、 $d = 0$ ，故

$$X_p = \begin{bmatrix} -\frac{10}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \end{bmatrix} e^{3t}$$

ODE 的通解為

$$X = X_h + X_p = c_1 \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{6t} + \begin{bmatrix} -\frac{10}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \end{bmatrix} e^{3t}$$

由

$$X(0) = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -7 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{10}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

可解得 $c_1 = \frac{17}{4}$ 、 $c_2 = -\frac{41}{12}$ ，故 ODE 的特解為

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \frac{17}{4} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} e^{2t} - \frac{41}{12} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{6t} + \begin{bmatrix} -\frac{10}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \end{bmatrix} e^{3t}$$

2. 考慮一條電線四分之一圓的電線 C ，其定義為

$$C = \{x = 2 \cos t, y = 2 \sin t, 0 \leq t \leq \pi/2\}$$

假設在 C 上的質量密度函數為 $\rho(x, y) = xy^2$ ，試計算其質心的座標 $(\bar{x}, \bar{y})$ 。

(10分)

《喻超凡，喻超弘 97 電子身障特考》

3. 97年鐵路人員電力工程三級特考

甲、申論題部分 (50分)

1. 求出下列微分方程式的通解： $y'' + 2y' + y = -3e^{-x} + 8xe^{-x} + 1$ (其中 $y' = \frac{dy}{dx}$, $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$)。(10分)
- 《喻超凡, 喻超弘 97鐵路電力特考》

《解》

- (1) 齊次解：令 $y = e^{mx}$ 代回 ODE 中可得

$$m^2 + 2m + 1 = 0 \Rightarrow m = -1, -1$$

故

$$y_h(x) = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x}$$

- (2) 特解：

$$\begin{aligned} y_p(x) &= \frac{1}{(D+1)^2}(-3e^{-x}) + \frac{1}{(D+1)^2}(8xe^{-x}) + \frac{1}{(D+1)^2}1 \\ &= (-3)\frac{x^2}{2}e^{-x} + 8e^{-x}\frac{1}{D^2}x + 1 \\ &= -\frac{3}{2}x^2e^{-x} + 8e^{-x}\int\int x dx dx + 1 \\ &= -\frac{3}{2}x^2e^{-x} + 8e^{-x}\frac{x^3}{6} + 1 \\ &= -\frac{3}{2}x^2e^{-x} + \frac{4}{3}x^3e^{-x} + 1 \end{aligned}$$

- (3) 通解： $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$

2. $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 8 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, 求 $A^{1000} = ?$ (5分) 及 $A^{-1000} = ?$ (5分)

《喻超凡, 喻超弘 97鐵路電力特考》

3. 一個溫度計現在顯示 5°C ，把它放入一個 22°C 的房間內，一分鐘後溫度計顯示為 12°C ，則需要多久後，溫度計顯示為 22°C 左右？

(A) 9.68 mins (B) 22.82 mins (C) 17.64 mins (D) 11.36 mins

《喻超凡，喻超弘 97 地方特考電力、電子工程》

《解》 (A)；設在時間 t 時溫度計的溫度為 T ，由牛頓冷卻定律知

$$\frac{dT}{dt} = k(T - 22)$$

k 為常數，分離變數可得

$$\frac{dT}{T - 22} = k dt \quad \text{故} \quad \int \frac{dT}{T - 22} = \int k dt$$

即

$$T(t) = 22 + ce^{kt} \quad (1)$$

又 $t = 0$ 時， $T(0) = 5$ ，代入 (1) 式可得 $c = -17$ ，當 $t = 1$ 時， $T(1) = 12$ ，再代入 (1) 可得

$$12 = 22 - 17e^k$$

可得 $k = \ln \frac{10}{17}$ ，則

$$T(t) = 22 - 17e^{(\ln \frac{10}{17})t} \quad (2)$$

將 $T(t) = 21.9$ 代入 (2) 式可得

$$21.9 = 22 - 17e^{(\ln \frac{10}{17})t}$$

故可解得

$$t = \frac{\ln \frac{0.1}{17}}{\ln \frac{10}{17}} = 9.67871$$

4. 下列何者為 $4xdy - ydx = x^2dy$ 之解？

(A) $(x-4)y = cx$ (B) $(x-4)y^2 = cx$ (C) $(x-4)y^3 = cx$ (D) $(x-4)y^4 = cx$

《喻超凡，喻超弘 97 地方特考電力、電子工程》

於位置 $(1, 0, -1)$ 之最陡降 (steepest descend) 方向

$$-\nabla\psi(1, 0, -1) = -(2\vec{i} - 2\vec{j}) = -2\vec{i} + 2\vec{j}$$

7. 求 $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, 其中 $\vec{F} = (x, y, z) = (z - 2y)\vec{i} + (3x - 4y)\vec{j} + (z + 3y)\vec{k}$, C 表在 $z = 2$ 平面上的單位圓。

(A) 2π (B) 4π (C) 5π (D) 6π

《喻超凡, 喻超弘 97 地方特考電力、電子工程》

《解》 (C); C 方程式為 $x^2 + y^2 = 1$ 、 $z = 2$, 令 C 所圍的區域為 S , 則 S 的法向量為 $\vec{n} = \vec{k}$, 且

$$(\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z - 2y & 3x - 4y & z + 3y \end{vmatrix} \cdot \vec{k} = 5$$

由 Stokes' 定理可知

$$\begin{aligned} \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n} dA \\ &= \iint_S 5 dA = 5 \times \pi \times 1^2 \\ &= 5\pi \end{aligned}$$

8. 下列線積分中, 何者與積分路徑無關?

(A) $2xy^2dx + xydy + dz$ (B) $\sinh xz(zdx - xdz)$
(C) $ye^{2z}dy - ze^ydz$ (D) $-z \sin xz dx + \cos y dy - x \sin xz dz$

《喻超凡, 喻超弘 97 地方特考電力、電子工程》

《解》 (D); 令

$$\vec{F} = -z \sin xz \vec{i} + \cos y \vec{j} - x \sin xz \vec{k}$$

《解》☞ (D) ; 由

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} = c \frac{\partial}{\partial v} - c \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial v} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial v} + \frac{\partial}{\partial z}$$

故

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} = (c \frac{\partial}{\partial v} - c \frac{\partial}{\partial z})^2 = c^2 \{ \frac{\partial^2}{\partial v^2} - 2 \frac{\partial^2}{\partial v \partial z} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = (\frac{\partial}{\partial v} + \frac{\partial}{\partial z})^2 = \frac{\partial^2}{\partial v^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial v \partial z} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

因此

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= c^2 \{ \frac{\partial^2 u}{\partial v^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial v \partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \} - c^2 \{ \frac{\partial^2 u}{\partial v^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial v \partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \} \\ &= -4c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial v \partial z} = 0 \end{aligned}$$

即 $\frac{\partial^2 u}{\partial v \partial z} = 0$

19. z 是一個複數 (complex number), $z = x + iy$, x 與 y 皆為實數, 則下列敘述何者正確?

(A) $0 \leq |\sin z| \leq 1$ (B) $|\sin z| \leq |\sin x|$ (C) $|\cosh z| \leq \cosh x$

(D) $|\cosh z| \leq |\sinh x|$

《喻超凡, 喻超弘 97 地方特考電力、電子工程》

《解》☞ (C) ;

$$\begin{aligned} |\cosh(x + iy)| &= |\cosh x \cosh(iy) + \sinh x \sinh(iy)| \\ &= |\cosh x (\cos y) + \sinh x (i \sin y)| \\ &= \sqrt{\cosh^2 x \cos^2 y + \sinh^2 x \sin^2 y} \\ &= \sqrt{\cosh^2 x (1 - \sin^2 y) + \sinh^2 x \sin^2 y} \\ &= \sqrt{\cosh^2 x + (\sinh^2 x - \cosh^2 x) \sin^2 y} \\ &= \sqrt{\cosh^2 x - \sin^2 y} \leq \cosh x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{\pi} \int_0^2 x \sqrt{1 - (x-1)^2} dx \\
&\quad \left(\text{令 } x-1 = \sin \theta, \text{ 故 } dx = \cos \theta d\theta \text{ 且 } \begin{array}{c|c|c} x & 0 & 2 \\ \hline u & -\frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{2} \end{array} \right) \\
&= \frac{2}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \sin \theta) \sqrt{1 - \sin^2 \theta} \cos \theta d\theta \\
&= \frac{2}{\pi} \left\{ \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos^2 \theta d\theta \right\} \\
&= 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E[X^2] &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \rho(x) dx \\
&= \int_0^2 x^2 \frac{2}{\pi} \sqrt{2x - x^2} dx \\
&= \frac{2}{\pi} \int_0^2 x^2 \sqrt{1 - (x-1)^2} dx \\
&\quad \left(\text{令 } x-1 = \sin \theta, \text{ 故 } dx = \cos \theta d\theta \text{ 且 } \begin{array}{c|c|c} x & 0 & 2 \\ \hline u & -\frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{2} \end{array} \right) \\
&= \frac{2}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \sin \theta)^2 \sqrt{1 - \sin^2 \theta} \cos \theta d\theta \\
&= \frac{2}{\pi} \left\{ \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin \theta \cos^2 \theta d\theta + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta \cos^2 \theta d\theta \right\} \\
&= 1 + \frac{2}{\pi} B\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) = 1 + \frac{2}{\pi} \frac{\Gamma(\frac{3}{2}) \Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(3)} \\
&= 1 + \frac{2}{\pi} \frac{\frac{1}{2} \sqrt{\pi} \frac{1}{2} \sqrt{\pi}}{2} = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}
\end{aligned}$$

因此

$$\text{Var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{5}{4} - 1 = \frac{1}{4}$$

因 $U = \sum_{n=1}^{\infty} 10^6$, 故 $U \sim N(10^6 \times 1, 10^6 \times \frac{1}{4})$, 因此

$$\begin{aligned}
P(U > 1002000) &= P\left(\frac{U - 10^6}{\frac{1}{2} \times 10^3} > \frac{1002000 - 10^6}{\frac{1}{2} \times 10^3}\right) \\
&= P(Z > 4) = 1 - P(Z \leq 4) = 1 - \Phi(4)
\end{aligned}$$

故可解得 $\lambda = 4$ 、 -5 、 8 ，將 $\lambda = 4$ 代回 $(A - \lambda I)X = 0$ 中可得

$$\begin{bmatrix} -8 & 0 & 6 \\ 2 & 0 & -4 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

故對應的特徵向量為

$$X = c_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (c_1 \neq 0)$$

將 $\lambda = -5$ 代回 $(A - \lambda I)X = 0$ 中可得

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 2 & 9 & -4 \\ 2 & 0 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

故對應的特徵向量為

$$X = c_2 \begin{bmatrix} 54 \\ -16 \\ -9 \end{bmatrix} \quad (c_2 \neq 0)$$

將 $\lambda = 8$ 代回 $(A - \lambda I)X = 0$ 中可得

$$\begin{bmatrix} -12 & 0 & 6 \\ 2 & -4 & -4 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

故對應的特徵向量為

$$X = c_3 \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix} \quad (c_3 \neq 0)$$

3. 解微分方程式 $(x-1)^2 y'' + 3(x-1)y' + y = x$, $(x-1 > 0)$ 。(15分)

《喻超凡, 喻超弘 97 電子技師》

《解》 令 $(x-1) = e^t$, 故 $t = \ln(x-1)$, 故

$$(x-1)y' = Dy, \quad (x-1)^2 y'' = D(D-1)y$$

其中 $D = \frac{d}{dt}$, 代回 ODE 中可得

$$D(D-1)y + 3Dy + y = e^t + 1$$

即

$$(D^2 + 2D + 1)y = e^t + 1$$

(1) 齊次解：令 $y = e^{mt}$ 代回 ODE 中可得

$$m^2 + 2m + 1 = 0 \Rightarrow m = -1, -1$$

故

$$y_h = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t} = c_1 \frac{1}{x-1} + c_2 \frac{\ln(x-1)}{x-1}$$

(2) 特解：

$$\begin{aligned} y_p &= \frac{1}{(D+1)^2} e^t + \frac{1}{(D+1)^2} 1 \\ &= \frac{1}{4} e^t + 1 = \frac{1}{4}(x-1) + 1 \\ &= \frac{1}{4}x + \frac{3}{4} \end{aligned}$$

(3) 通解： $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$

4. 設隨機變數 X 為 Poisson 分布, 試證 $E[X] = a$, $\sigma_X^2 = a$ 。(15分)

《喻超凡, 喻超弘 97 電子技師》

1. 98年公務人員電力、電子、電信、醫學工程高考

甲、申論題部分 (50分)

1. 試應用留數定理 (Residue Theorem) 計算下列積分 $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^4 + 1}$ 。(15分)

《喻超凡, 喻超凡 98 電力、電子、電信、醫工高考》

《解》 令 $f(z) = \frac{1}{1+z^4}$, 由 $z^4 + 1 = 0$, 可得

$$z^4 = -1 = e^{(2k\pi+\pi)i} \Rightarrow z = e^{\frac{(2k\pi+\pi)i}{4}} \quad (k = 0, 1, 2, 3)$$

為 $f(z)$ 的 1 階 poles, 只有 $z_1 = e^{i\frac{\pi}{4}}$ 、 $z_2 = e^{i\frac{3\pi}{4}}$ 在複數平面的上半面, 且其殘值為

$$\text{Res}f(z_1) = \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{1}{4z^3} = \frac{1}{4}e^{-\frac{3}{4}\pi i} = \frac{1}{4}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\text{Res}f(z_2) = \lim_{z \rightarrow z_2} \frac{1}{4z^3} = \frac{1}{4}e^{-\frac{9}{4}\pi i} = \frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

故

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^4} &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4} \\ &= \frac{1}{2} \times 2\pi i \{ \text{Res}f(z_1) + \text{Res}f(z_2) \} \\ &= \pi i \left\{ \frac{1}{4}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \right\} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

2. (1) 請用迴旋積分公式 (convolution formula) 求出 $H(s) = \frac{1}{s^2(s^2+1)}$ 的反拉普拉斯轉換式 (inverse Laplace transform)。(10分)

(2) 寫出 $g(t) = \sin(wt+v)$ 的拉普拉斯轉換式 (Laplace transform), 其中 w 及 v 都是常數。(5分) 《喻超凡, 喻超凡 98 電力、電子、電信、醫工高考》

7. 令矩陣 $A = \begin{bmatrix} 0 & b & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ a & 0 & 0 \\ 0 & c & -d \end{bmatrix}$, 設 a, b, c, d 皆為正值, 且 $A^T A = I$, 則 $a+b+c+d$ 等於多少?

- (A) $1 + \frac{2}{\sqrt{5}}$ (B) $1 + \frac{4}{\sqrt{5}}$ (C) 2 (D) $2 + \frac{1}{\sqrt{5}}$

《喻超凡, 喻超凡 98 電力、電子、電信、醫工高考》

《解》 (B); 因 A 為正交矩陣, 故 $a = \pm 1$, 且

$$\begin{cases} b^2 + (\frac{2}{\sqrt{5}})^2 = 1 \\ (-d)^2 + (\frac{2}{\sqrt{5}})^2 = 1 \\ b(\frac{2}{\sqrt{5}}) - cd = 0 \\ bc - d(\frac{2}{\sqrt{5}}) = 0 \end{cases}$$

故 $b = \pm \frac{1}{\sqrt{5}}$ 、 $d = \pm \frac{1}{\sqrt{5}}$, 當 $b = \frac{1}{\sqrt{5}}$ 、 $d = \frac{1}{\sqrt{5}}$ 時, 則 $c = \frac{2}{\sqrt{5}}$, 因此

$$a+b+c+d = 1 + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}} = 1 + \frac{4}{\sqrt{5}}$$

8. 令 u 為 $\mathbb{R}^n$ 向量, 則下列敘述何者錯誤?

- (A) uu^T 為對稱矩陣 (B) uu^T 的秩 (rank) 為 1
(C) uu^T 恆可對角化 (D) uu^T 的特徵值恆大於 0

《喻超凡, 喻超凡 98 電力、電子、電信、醫工高考》

《解》 (B) (D); 反例為令

$$u = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

則

$$uu^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

則 $\text{rank}(uu^T) = 0$ ，且 uu^T 的特徵值為 0。

9. 令向量 $x = [1 \ 1 \ -2]^T$ ，下列何者正確？

(A) $\|x\|_1 = \sqrt{6}$ ， $\|x\|_\infty = 2$ (B) $\|x\|_1 = 4$ ， $\|x\|_\infty = \sqrt{6}$

(C) $\|x\|_1 = 4$ ， $\|x\|_\infty = 2$ (D) $\|x\|_1 = 2$ ， $\|x\|_\infty = 4$

《喻超凡，喻超凡 98 電力、電子、電信、醫工高考》

《解》 (C)；

$$\|x\|_1 = |1| + |1| + |-2| = 4$$

$$\|x\|_\infty = \max\{1, 1, |-2|\} = 2$$

10. 試求當線性聯立方程式： $\begin{cases} x + y = 3 \\ x + (a^2 - 8)y = a \end{cases}$ ，具有無窮多組解時， $a = ?$

(A) $a = -3$ (B) $a = 3$ (C) $a = \sqrt{3}$ (D) $a = \pm 2\sqrt{2}$

《喻超凡，喻超凡 98 電力、電子、電信、醫工高考》

《解》 (B)； $\frac{1}{1} = \frac{1}{a^2 - 8} = \frac{3}{a}$ ，故 $a = 3$

11. 若 $f(t)$ 的拉普拉斯轉換式 (Laplace transform) 為 $F(s) = \frac{1}{s(s^2 + 2s + 2)}$ ，試求 $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$ 。

(A) 0 (B) $\frac{1}{2}$ (C) 1 (D) ∞

《喻超凡，喻超凡 98 電力、電子、電信、醫工高考》

《解》☞ (B) ;

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{s(s^2 + 2s + 2)} = \frac{1}{2}$$

12. 以下何者為 $\delta(t-a) * u(t+b)$ 之拉普拉斯轉換 (Laplace transform) ? 其中 $\delta(t)$ 為脈衝函數 (impulse function), $u(t)$ 為單步階函數 (unit step function)

(A) $\frac{e^{bs}e^{-as}}{s}$ (B) $\frac{e^{-bs}e^{as}}{s}$ (C) $\frac{e^{bs}e^{-as}}{s^2}$ (D) $\frac{e^{-bs}e^{as}}{s^2}$

《喻超凡, 喻超弘 98 電力、電子、電信、醫工高考》

《解》☞ (A) ;

$$\mathcal{L}\{\delta(t-a) * u(t+b)\} = \mathcal{L}\{\delta(t-a)\} \mathcal{L}\{u(t+b)\} = e^{-as} \frac{e^{bs}}{s}$$

13. 已知週期為 1 的函數 $f(x) = \begin{cases} 20 & , 0 < x < 0.5 \\ -20 & , 0.5 < x < 1 \end{cases}$, 欲將

$f(x)$ 展開成 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin 2n\pi x$, 試問 b_n 為何值?

(A) $\frac{40}{n\pi}(\cos n\pi)$ (B) $\frac{40}{n\pi}(-\cos n\pi)$ (C) $\frac{40}{n\pi}(1 - \cos n\pi)$ (D) $\frac{40}{n\pi}(1 + \cos n\pi)$

《喻超凡, 喻超弘 98 電力、電子、電信、醫工高考》

《解》☞ (C) ; 因 $f(x)$ 為奇函數, 故

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin 2n\pi x$$

其中

$$b_n = 4 \int_0^{\frac{1}{2}} 20 \sin(2n\pi x) dx = \frac{40(1 - \cos n\pi)}{n\pi}$$

14. 有一函數 $F(x) = \begin{cases} 1, & |x| < a \\ 0, & |x| > a \end{cases}$, 求 $F(x)$ 的傅立葉轉換 (Fourier transform)

$$\hat{f}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(x)e^{-iwx} dx = ?$$

- (A) $\frac{2 \sin wa}{w}$ (B) $\sqrt{2\pi} \frac{\sin wa}{w}$ (C) $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin wa}{w}$ (D) $\frac{\sin wa}{w}$

《喻超凡, 喻超弘 98 電力、電子、電信、醫工高考》

《解》 (C) ;

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{F(x)\} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(x)e^{-iwx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^a (\cos wx - i \sin wx) dx \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^a \cos wx dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin wx}{w} \Big|_0^a \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin wa}{w} \end{aligned}$$

15. 微分方程式 $x(1-x)y'' + \{c - (1+a+b)x\}y' - aby = 0$ 稱為 hyper-geometric 方程式, 其中的 a, b, c 為常數。則 $x=0$ 是此方程式的什麼點?

- (A) 規則奇點 (regular singular point) (B) 不規則奇點 (irregular singular point)
(C) 正常點 (ordinary point) (D) 可解析點 (analytic point)

《喻超凡, 喻超弘 98 電力、電子、電信、醫工高考》

《解》 (A) ; 原式可改寫成

$$y'' + \frac{c - (1+a+b)x}{x(1-x)} y' - \frac{ab}{x(1-x)} y = 0$$

令 $P(x) = \frac{c - (1+a+b)x}{x(1-x)}$ 、 $Q(x) = -\frac{ab}{x(1-x)}$, 則 $x=0$ 為 $P(x)$ 的奇點, 但 $x=0$ 為 $xP(x)$ 、 $x^2Q(x)$ 的常點, 故 $x=0$ 為 ODE 的規則奇點。

《解》☞ (D) ; 性質

3. 微分方程式 $\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + y = 4$, 且 $y(0) = y'(0) = 0$, 求 $y(1)$ 為何 ?

- (A) $4e^{-1} - 8$ (B) $8e^{-1} - 4$ (C) $8e^{-1} + 4$ (D) $4e^{-1} + 8$

《喻超凡, 喻超弘 98 鐵路電力工程特考》

《解》☞ 無解 ; 對 ODE 兩端取 L-T , 可得

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 2\{sY(s) - y(0)\} + Y(s) = \frac{4}{s}$$

其中 $\mathcal{L}\{y(x)\} = Y(s)$, 整理可得

$$Y(s) = \frac{4}{s(s^2 + 2s + 1)} = \frac{4}{s} - \frac{4}{(s+1)^2} - \frac{4}{s+1}$$

故

$$y(x) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = 4 - 4xe^{-x} - 4e^{-x}$$

故

$$y(1) = 4 - 4e^{-1} - 4e^{-1} = 4 - 8e^{-1}$$

4. 試求反拉氏轉換 (Inverse Laplace Transform) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s-2}{s^2+6s+25}\right\}$:

- (A) $3 \cos 2t - 2 \sin 2t$ (B) $3e^{-3t} \cos 2t - 2e^{-3t} \sin 2t$
 (C) $3e^{-3t} \cos 4t - 2.75e^{-3t} \sin 4t$ (D) $e^{-3t} \cos 2t - e^{-3t} \sin 2t$

《喻超凡, 喻超弘 98 鐵路電力工程特考》

《解》☞ (C) ;

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s-2}{s^2+6s+25}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s-2}{(s+3)^2+4^2}\right\} \\ &= e^{-3t} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3(s-3)-2}{s^2+4^2}\right\} \\ &= e^{-3t} \left\{3 \cos 4t - \frac{11}{4} \sin 4t\right\} \end{aligned}$$

5. 設一三度空間內之曲線可表示為位置向量 $\vec{F}(t) = \cos(t)\vec{i} + \sin(t)\vec{j} + \sqrt{3}t\vec{k}$ ，其中 $-\pi \leq t \leq \pi$ ，則該曲線長度為何？

- (A) 2π (B) $\frac{4}{3}\pi$ (C) $2\sqrt{3}\pi$ (D) 4π

《喻超凡，喻超弘 98 鐵路電力工程特考》

《解》☞ (D)；曲線 C 的參數式為

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = \sqrt{3}t \end{cases}$$

故

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt = \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2 + (\sqrt{3})^2} dt = 2 dt$$

則 C 的弧長為

$$S = \int_C ds = \int_{-\pi}^{\pi} 2 dt = 4\pi$$

6. 令 $F(s) = \mathcal{L}\{(t^3 - 3t + 2)e^{-2t}\}$ ，則下列何者正確？

- (A) $F(0) = \frac{5}{8}$ (B) $F(-1) = 1$ (C) $F(1) = \frac{10}{27}$ (D) $F(\infty) = 1$

《喻超凡，喻超弘 98 鐵路電力工程特考》

《解》☞ (A)；

$$F(s) = \mathcal{L}\{(t^3 - 3t + 2)e^{-2t}\} = \frac{3!}{(s+2)^4} - \frac{3}{(s+2)^2} + \frac{2}{s+2}$$

故

$$F(0) = \frac{3}{8} - \frac{3}{4} + \frac{2}{2} = \frac{5}{8}$$

7. 下列哪一向量與平面 $3x - 5y + 2z = 10$ 垂直？

- (A) $[1, -1, 1]$ (B) $[1, 1, 1]$ (C) $[\frac{3}{10}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{5}]$ (D) $[\frac{10}{3}, -2, 5]$

《喻超凡, 喻超弘 98 鐵路電力工程特考》

《解》☞ (C)；平面的法向量為

$$\vec{n} = 3\vec{i} - 5\vec{j} + 2\vec{k}$$

8. $f(t)$ 是週期為 2π 的函數, 定義 $g(t)$ 為 $g(t) = \frac{f(t) - f(-t)}{2}$, 將 $g(t)$ 的傅立葉級數 (Fourier series) 表示成

$$g(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)\}$$

下列敘述何者正確？

- (A) $a_n = 0, n = 1, 2, 3 \dots$ (B) $b_n = 0, n = 1, 2, 3 \dots$ (C) $a_0 \neq 0$

- (D) $a_n + b_n = 0, n = 1, 2, 3 \dots$ 《喻超凡, 喻超弘 98 鐵路電力工程特考》

《解》☞ (A)；因

$$g(-t) = \frac{f(-t) - f(t)}{2} = -\frac{f(t) - f(-t)}{2} = -g(t)$$

故 $g(t)$ 為奇函數，則

$$g(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nt)$$

9. 矩陣 $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ 的零空間 (null space) 可以向量形式

$\alpha v_1 + \beta v_2$ 表示, 其中 α 及 β 為常數, 則下列何者正確?

(A) $v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, and $v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ (B) $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, and $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

(C) $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, and $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ (D) $v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, and $v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

《喻超凡, 喻超弘 98 鐵路電力工程特考》

《解》 (D) $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_{12}} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$\xrightarrow{R_{12}^{(2)} R_{13}^{(1)}} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_{24}^{(-1/3)}} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

其中

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{\pi^2}{3}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos nx dx = \frac{4 \cos n\pi}{n^2}$$

故

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \cos n\pi}{n^2} \cos nx$$

令 $x = \pi$ 代入上式可得

$$f(\pi) = \pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \cos n\pi}{n^2} \cos n\pi$$

即

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} = \pi^2 - \frac{\pi^2}{3} = \frac{2\pi^2}{3}$$

故

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

14. 將 $F(x) = x^2$, $0 < x < 2\pi$, 展開為傅立葉級數, 當週期為 2π 時,

$$F(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

則 $b_n = ?$

(A) $b_n = \frac{4\pi}{n}$ (B) $b_n = \frac{-4\pi}{n}$ (C) $b_n = \frac{\pi}{n}$ (D) $b_n = \frac{-\pi}{n}$

《喻超凡, 喻超弘 98鐵路電力工程特考》

《解》☞ (B); 因 $F(x) = x^2$ ($0 < x < 2\pi$) 不具有奇偶性, 故令

$$F(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

其中

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x^2 dx = \frac{4\pi^2}{3}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x^2 \cos nx \, dx = \frac{1}{\pi} \left(\frac{x^2}{n} \sin nx + \frac{2x}{n^2} \cos nx - \frac{2}{n^3} \sin nx \right) \Big|_0^{2\pi} = \frac{4}{n^2}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x^2 \sin nx \, dx = \frac{1}{\pi} \left(-\frac{x^2}{n} \cos nx + \frac{2x}{n^2} \sin nx + \frac{2}{n^3} \cos nx \right) \Big|_0^{2\pi} = -\frac{4\pi}{n}$$

故

$$F(x) = \frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{n^2} \cos nx - \frac{4\pi}{n} \sin nx \right)$$

15. 求 $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - \cos z}{\sin z^2}$ 之值為何？

- (A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) 1

《喻超凡, 喻超弘 98鐵路電力工程特考》

《解》☞ (C) ;

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - \cos z}{\sin z^2} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^2}{\sin z^2} \cdot \frac{1 - \cos z}{z^2} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^2}{\sin z^2} \cdot \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - \cos z}{z^2} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{2z} = \frac{1}{2}$$

16. 假設 $z = x + iy$ 為複數 (complex number), 下列哪一個是全函數 (entire function)?

- (A) $f(z) = 2xy + i(x^2 - y^2)$
 (B) $f(z) = z - \bar{z}$, $\bar{z}$ 是 z 的共軛複數 (complex conjugate)
 (C) $f(z) = x\bar{z}$
 (D) $f(z) = (z^2 - 2)e^{-x}e^{-iy}$

《喻超凡, 喻超弘 98鐵路電力工程特考》

《解》☞ (D) ; 因

$$f(z) = (z^2 - 2)e^{-x}e^{-iy} = (z^2 - 2)e^{-(x+iy)} = (z^2 - 2)e^{-z}$$

故

$$A = [b_1 \ b_2 \ b_3][x_1 \ x_2 \ x_3]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

3. 求下列級數，當 z 為何值時為收斂？當 z 為何值時為發散？（ z 為複變數， $i = \sqrt{-1}$ ）

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{3^n}$ (5分)

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} z^{2n-1}}{(2n-1)!}$ (5分) 《喻超凡，喻超弘 98 地方特考電力、電子工程》

《解》

(1) 因

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(z-i)^{n+1}}{\frac{3^{n+1}}{(z-i)^n}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} |z-i| = \frac{1}{3} |z-i| < 1$$

級數收斂，故級數在 $|z-i| < 3$ 時收斂，在 $|z-i| \geq 3$ 時發散。

(2) 因

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{n-1} z^{2n+1}}{\frac{(2n+1)!}{(-1)^{n-1} z^{2n-1}}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{(2n+1)(2n)} z^2 \right| < 1$$

級數收斂，即

$$|z|^2 < \lim_{n \rightarrow \infty} (2n+1)(2n) = \infty$$

故 $|z| < \infty$ 時級數收斂。在複數平面上沒有點會發散。

4. 二維隨機變數 X 與 Y 的聯合機率密度函數 (joint probability density function) 爲

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} xy & , 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2 \\ 0 & , \text{otherwise} \end{cases}$$

- (1) 求 $\text{Cov}(X, Y)$ ，即 X 與 Y 的共變異值 (covariance) 爲何？(3分) X 與 Y 是否不相關聯 (uncorrelated)？(2分)

- (2) X 與 Y 是否獨立 (independent)？(5分)

《喻超凡, 喻超弘 98 地方特考電力、電子工程》

《解》

(1) 因

$$E[X] = \int_{x=0}^{x=1} \int_{y=0}^{y=2} x f_{X,Y}(x, y) dy dx = \int_{x=0}^{x=1} \int_{y=0}^{y=2} x \times xy dy dx = \frac{2}{3}$$

$$E[Y] = \int_{x=0}^{x=1} \int_{y=0}^{y=2} y f_{X,Y}(x, y) dy dx = \int_{x=0}^{x=1} \int_{y=0}^{y=2} y \times xy dy dx = \frac{4}{3}$$

$$E[XY] = \int_{x=0}^{x=1} \int_{y=0}^{y=2} xy f_{X,Y}(x, y) dy dx = \int_{x=0}^{x=1} \int_{y=0}^{y=2} xy \times xy dy dx = \frac{8}{9}$$

故

$$\text{Cov}(X, Y) = E[XY] - E[X]E[Y] = \frac{8}{9} - \frac{2}{3} \times \frac{4}{3} = 0$$

又相關係數

$$\rho_{XY} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = 0$$

則 X 、 Y 不相關。

(2) 因

$$f_X(x) = \int_{y=0}^{y=2} f_{X,Y}(x, y) dy = \int_{y=0}^{y=2} xy dy = 2x \quad (0 < x < 1)$$

$$f_Y(y) = \int_{x=0}^{x=1} f_{X,Y}(x, y) dx = \int_{x=0}^{x=1} xy dx = \frac{y}{2} \quad (0 < y < 2)$$

因

$$f_{X,Y}(x, y) = xy = f_X(x)f_Y(y) \quad (0 < x < 1, 0 < y < 2)$$

故 X 、 Y 爲獨立

乙、測驗題部分 (50分)

1. 下列何者為微分方程式 $y^2 dx + (3xy - 4y^3) dy = 0$ 之通解？其中 c 為任意實數。

(A) $y = 2x^2/5 + x + c/x$ (B) $y = x/5 + c/x$ (C) $x = y/5 + c/y$

(D) $x = 4y^2/5 + c/y^3$

《喻超凡, 喻超弘 98 地方特考電力、電子工程》

《解》☞ (D)；原式可改寫成

$$\frac{dx}{dy} + \frac{3}{y}x = 4y$$

積分因子為

$$I = \exp\left\{\int \frac{3}{y} dy\right\} = \exp\{3 \ln |y|\} = y^3$$

則

$$Ix = \int (y^3 \times 4y) dy = \frac{4}{5}y^5 + c$$

故

$$x = \frac{4}{5}y^2 + \frac{c}{y^3}$$

2. 若 $y_1 = e^{px} \cos(qx)$ 是一齊次 (homogeneous) 微分方程式之一解，則此微分方程式可能是：

(A) $y'' - 2py' + q^2y = 0$ (B) $y'' - 2pqy' + q^2y = 0$

(C) $y'' - 2pqy' + (p^2 + q^2)y = 0$ (D) $y'' - 2py' + (p^2 + q^2)y = 0$

《喻超凡, 喻超弘 98 地方特考電力、電子工程》

《解》☞ (D)；因 ODE 具有 $y_1 = e^{px} \cos qx$ 的齊次解，故 ODE 的特性方程式的根為 $m = p \pm qi$ ，則 ODE 的特性方程式為

$$m^2 - 2pm + (p^2 + q^2) = 0$$

即 ODE 爲

$$y'' - 2py' + (p^2 + q^2)y = 0$$

3. 試求 $2xyy' = y^2 - x^2$ 之解，其中 c 爲任意實數。

(A) $x^2 + y^2 = c$ (B) $x/y + y/x = c$ (C) $y^2/x + x = c$ (D) $x^2/y + y = c$

《喻超凡，喻超弘 98 地方特考電力、電子工程》

《解》 (C)；原式可改寫成

$$2xyy' - y^2 = -x^2$$

令 $u = y^2$ ，故 $\frac{du}{dx} = 2yy'$ 代回 ODE 中可得

$$x \frac{du}{dx} - u = -x^2 \Rightarrow \frac{du}{dx} - \frac{1}{x} u = -x$$

積分因子爲

$$I = \exp\left\{\int -\frac{1}{x} dx\right\} = \exp\{-\ln|x|\} = \frac{1}{x}$$

故

$$Iu = \int \frac{1}{x} (-x) dx = -x + c$$

故

$$\frac{1}{x} y^2 = -x + c$$

4. 有一個位置向量函數 $\vec{F} = \sin^2 x \vec{i} - y \sin 2x \vec{j} + 5z \vec{k}$ ，計算 $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dA$ 之值，其中 S 爲立體 $V = \{(x, y, z) : |x| \leq 1, |y| \leq 1, |z| \leq 1\}$ 的表面。

(A) 10 (B) 20 (C) 30 (D) 40

《喻超凡，喻超弘 98 地方特考電力、電子工程》

11. 下列敘述何者正確？

- (A) 如果矩陣 B 、 C 皆屬於 $\mathbb{R}^{n \times n}$ ，並且對於所有 $x \in \mathbb{R}^n$ ， $Bx = Cx$ 皆成立，則 B 不一定要等於 C
- (B) 如果矩陣 A 屬於 $\mathbb{R}^{n \times n}$ ，並且對於所有 $x \in \mathbb{R}^n$ ， $Ax = 0$ 皆成立，則 A 不一定等於零矩陣
- (C) 如果矩陣 A 為對稱 (symmetric) 且非奇異 (nonsingular)，則 A^{-1} 也是對稱矩陣
- (D) 一個線性系統如果方程式的個數小於變數的數目時，則此系統會有無窮多 (infinite) 解

《喻超凡，喻超弘 98 地方特考電力、電子工程》

《解》 (C)；因 A 為對稱矩陣，故 $A^T = A$ ，則

$$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1} = A^{-1}$$

故 A^{-1} 為對稱矩陣。

12. 定義函數 $f(t)$ 的傅利葉轉換 (Fourier transform) 為 $F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt$ ，其中 $i = \sqrt{-1}$ 。定義脈衝函數 $\delta(t)$ 如下： $t \neq 0$ 時 $\delta(t) = 0$ ；同時 $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$ 。求 $\delta(t)$ 的傅利葉轉換為何？

- (A) $\omega\delta(\omega)$ (B) $\delta(\omega)$ (C) $\frac{\delta(\omega)}{\omega}$ (D) 1

《喻超凡，喻超弘 98 地方特考電力、電子工程》

《解》 (D)；

$$\mathcal{F}\{\delta(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-i\omega t} dt = 1$$

15. $i = \sqrt{-1}$ ，有關數列(sequence) $\left\{\frac{e^{n\pi i/4}}{n}\right\}$ 敘述，下列何者正確？

- (A) 有界，收斂 (B) 無界，發散 (C) 有界，發散 (D) 無界，收斂

《喻超凡，喻超弘 98 地方特考電力、電子工程》

《解》☞ (A)；因

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{n\pi i/4}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\cos \frac{n\pi}{4} + i \sin \frac{n\pi}{4} \right) = 0$$

故數列 $\left\{\frac{e^{n\pi i/4}}{n}\right\}$ 有界且收斂。

16. 假設 c 是個複數 (complex number)，也是常數 (constant)，並且函數 $f(z)$ 的導數 $\frac{d}{dz}f(z) \triangleq f'(z)$ 存在，則 $\frac{d}{dz}\{c^{f(z)}\} = ?$

- (A) $cf'(z)\log[f(z)]$ (B) $f'(z)c^{f(z)}$ (C) $f'(z)c^{f(z)}\log(c)$ (D) $c^{f(z)}f'(z)\log[f(z)]$

《喻超凡，喻超弘 98 地方特考電力、電子工程》

《解》☞ (C)；

$$\frac{d}{dz}\{c^{f(z)}\} = c^{f(z)}(\log c) \frac{df}{dz}$$

17. 求解 $\oint_C \frac{-z-4-i3}{(z+i)(z-2)} dz$ ，其中 C 表示 $|z|=5$ 的圓 (circle) 且逆時鐘方向 (counterclockwise)。

- (A) $i4\pi$ (B) $-i2\pi$ (C) $i10\pi$ (D) 0

《喻超凡，喻超弘 98 地方特考電力、電子工程》

《解》☞ (B) ; 令 $f(z) = \frac{-z-4-i3}{(z+i)(z-2)}$, 則 $f(z)$ 在 C 內具有 $z = -i$ 及 $z = 2$ 的一階 poles, 且

$$\operatorname{Res} f(-i) = \frac{-z-4-i3}{(z-2)} \Big|_{z=-i} = \frac{i-4-3i}{-i-2} = 2$$

$$\operatorname{Res} f(2) = \frac{-z-4-i3}{(z+i)} \Big|_{z=2} = \frac{-2-4-3i}{2+i} = -3$$

故

$$\oint_C \frac{-z-4-i3}{(z+i)(z-2)} dz = 2\pi i \{ \operatorname{Res} f(-i) + \operatorname{Res} f(2) \} = 2\pi i \{ 2 - 3 \} = -2\pi i$$

18. 利用變換變數 $v = x$, $z = 2x - y$ 可將偏微分方程式 $u_{xx} + 4u_{xy} + 4u_{yy} = 0$ 轉換為: (其中 $u_{xx} \triangleq \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$)

(A) $u_{vv} = 0$ (B) $u_{zz} = 0$ (C) $u_{vz} = 0$ (D) $u_{vv} + u_{zz} = 0$

《喻超凡, 喻超弘 98 地方特考電力、電子工程》

《解》☞ (A) ;

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial v} + 2 \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} &= \left(\frac{\partial}{\partial v} + 2 \frac{\partial}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial}{\partial v} + 2 \frac{\partial}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2}{\partial v^2} + 4 \frac{\partial^2}{\partial v \partial z} + 4 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} = - \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} &= \left(- \frac{\partial}{\partial z} \right) \left(- \frac{\partial}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} &= \left(\frac{\partial}{\partial v} + 2 \frac{\partial}{\partial z} \right) \left(- \frac{\partial}{\partial z} \right) = - \frac{\partial^2}{\partial v \partial z} - 2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 4 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ &= \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial v^2} + 4 \frac{\partial^2 u}{\partial v \partial z} + 4 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right\} + 4 \left\{ - \frac{\partial^2 u}{\partial v \partial z} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right\} + 4 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial v^2} = 0 \end{aligned}$$

故 $\vec{F}$ 為保守場, 則積分與路徑無關。

(2)

$$\begin{aligned}\int_C (y^3 + 3x^2y)dx + (x^3 + 3xy^2 + 1)dy &= \int_{(0,0)}^{(2,8)} d(xy^3 + x^3y + y) \\ &= (xy^3 + x^3y + y) \Big|_{(0,0)}^{(2,8)} = 1096\end{aligned}$$

5. 隨機變數 (random variable) X 的機率密度函數 (probability density function) 為

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{18\pi}} e^{-x^2/18}。$$

(1) 求 X 的期望值 (expected value) $E[X]$ 。(5分)

(2) 求 $E[X^2]$ 。(5分)

(3) 求 $E[X^3]$ 。(5分)

(4) 求 $3X - 2$ 的變異數 (variance)。(10分) 《喻超凡, 喻超弘 98 電機技師》

《解》

(1)

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{\sqrt{18\pi}} e^{-x^2/18} dx = 0$$

(2) 由

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad (1)$$

對 (1) 式兩端取 a 的微分可得

$$\int_{-\infty}^{\infty} -x^2 e^{-ax^2} dx = -\frac{1}{2} \frac{\sqrt{\pi}}{a^{\frac{3}{2}}} \quad (a > 0)$$

即

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\pi}}{a^{\frac{3}{2}}}$$

故

$$E[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{18\pi}} e^{-x^2/18} dx = \frac{1}{\sqrt{18\pi}} \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\pi}}{(\frac{1}{18})^{\frac{3}{2}}} = 9$$

1. 99 年公務人員電力、電子、醫學工程高考

甲、申論題部分 (50 分)

1. 試利用拉氏轉換 (Laplace transformation) 求解：(15 分)

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -10 \\ \frac{5}{2} & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

(其中 $x'_i = \frac{dx_i}{dt}$, $i = 1, 2$)

《喻超凡, 喻超弘 99 電力、電子、醫工高考》

《解》 原式可改寫成

$$\begin{cases} x'_1 + 10x_2 = 0 \\ x'_2 - \frac{5}{2}x_1 + 10x_2 = -1 \end{cases}$$

對上式兩端取 L-T, 可得

$$\begin{cases} sX_1(s) - x_1(0) + 10X_2(s) = 0 \\ sX_2(s) - x_2(0) - \frac{5}{2}X_1(s) + 10X_2(s) = -\frac{1}{s} \end{cases}$$

其中 $\mathcal{L}\{x_1(t)\} = X_1(s)$ 、 $\mathcal{L}\{x_2(t)\} = X_2(s)$, 整理可得

$$\begin{cases} sX_1(s) + 10X_2(s) = \frac{2}{5} \\ -\frac{5}{2}X_1(s) + (s+10)X_2(s) = -\frac{1}{s} + \frac{2}{5} \end{cases}$$

故

$$\begin{aligned} X_1(s) &= \frac{2(s^2 + 25)}{5s(s+5)^2} = \frac{2}{5s} - \frac{4}{(s+5)^2} \\ X_2(s) &= \frac{2s}{5(s+5)^2} = -\frac{2}{(s+5)^2} + \frac{2}{5(s+5)} \end{aligned}$$

故

$$x_1(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X_1(s)\} = \frac{2}{5} - 4te^{-5t}$$

$$x_2(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X_2(s)\} = -2te^{-5t} + \frac{2}{5}e^{-5t}$$

2. 設曲線 C 之參數表示式為 $x = \sqrt{3}t$, $y = \sin t$, $z = \cos t$, 求自 $(0, 0, 1)$ 到 $(\sqrt{3}\pi, 0, -1)$ 之線積分 $\int_C (x^2 + yz) ds$ 。(10分)

《喻超凡, 喻超弘 99 電力、電子、醫工高考》

《解》因 C 的參數為 $x = \sqrt{3}t$, $y = \sin t$, $z = \cos t$, 故點 $(0, 0, 1)$ 時 $t = 0$ 、點 $(\sqrt{3}\pi, 0, -1)$ 時 $t = \pi$, 且

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (\cos t)^2 + (-\sin t)^2} dt = 2 dt$$

則

$$\begin{aligned} \int_C (x^2 + yz) ds &= \int_{t=0}^{t=\pi} \{(\sqrt{3}t)^2 + \sin t \cos t\} 2 dt \\ &= 2\left(t^3 + \frac{1}{2} \sin^2 t\right) \Big|_{t=0}^{t=\pi} \\ &= 2\pi^3 \end{aligned}$$

3. 令矩陣 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$,

(1) 求矩陣 X 使得 $D = X^{-1}AX$ 為一對角矩陣 (diagonal matrix)。(7分)

(2) 求 $A^{100} + 2A^{101}$ 。(8分) 《喻超凡, 喻超弘 99 電力、電子、醫工高考》

《解》

乙、測驗題部分 (50 分)

1. 試問 $\int_0^{\infty} \frac{\sin 3t}{t} dt$ 之解為何？

- (A) 0 (B) $\frac{\pi}{6}$ (C) $\frac{\pi}{3}$ (D) $\frac{\pi}{2}$

《喻超凡, 喻超弘 99 電力、電子、醫工高考》

《解》☞ (D) ;

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{\sin 3t}{t} dt &= \int_0^{\infty} \frac{\sin 3t}{t} e^{-st} dt \Big|_{s=0} = \mathcal{L}\left\{\frac{\sin 3t}{t}\right\} \Big|_{s=0} \\ &= \int_{s=0}^{\infty} \frac{3}{s^2 + 3^2} ds = \tan^{-1} \frac{s}{3} \Big|_{s=0}^{\infty} = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

2. 下列何者為微分方程式 $y'' + 4y = 8x^2$ 的一般解？以下選項中的 A 、 B 為任意常數。

- (A) $y = A \cos 2x + B \sin 2x + 2x^2$ (B) $y = A \cos 2x + B \sin 2x + 2x^2 - 1$
 (C) $y = A \cos 2x + B \sin 2x + 4x^2$ (D) $y = A \cos 2x + B \sin 2x + 2x^2 - 4$

《喻超凡, 喻超弘 99 電力、電子、醫工高考》

《解》☞ (B) ; 齊次解：令 $y = e^{mx}$ 代回 ODE 中可得

$$m^2 + 4 = 0 \Rightarrow m = \pm 2i$$

故

$$y_h(x) = A \cos 2x + B \sin 2x$$

特解

$$y_p(x) = \frac{1}{D^2 + 4} 8x^2 = \frac{1}{4} \frac{1}{1 + \frac{D^2}{4}} (8x^2) = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{D^2}{4} + \cdots\right) (8x^2) = 2x^2 - 1$$

4. 設微分方程式 $y'' + ay' + by = 0$, $y(0) = y_0$, $y'(0) = y'_0$ 的解 $y(t)$ 的拉氏轉換為 $Y(s) = \frac{3}{s^2 - 4}$, 試求 a 、 b 、 y_0 、 y'_0 之值, 並判定下列何者正確?
- (A) $a + b + y_0 + y'_0 = 0$ (B) $a + b + y_0 + y'_0 = -1$
 (C) $a + b + y_0 + y'_0 = -2$ (D) $a + b + y_0 + y'_0 = -3$

《喻超凡, 喻超弘 99 電力、電子、醫工高考》

《解》☞ (B); 對 ODE 兩端取 L-T, 可得

$$s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) + a\{sY(s) - y(0)\} + bY(s) = 0$$

其中 $\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s)$, 故

$$Y(s) = \frac{sy_0}{s^2 + as + b} + \frac{y'_0 + ay_0}{s^2 + as + b} = \frac{3}{s^2 - 4}$$

故 $a = 0$ 、 $b = -4$ 、 $y_0 = 0$ 、 $y'_0 = 3$, 則

$$a + b + y_0 + y'_0 = 0 - 4 + 0 + 3 = -1$$

5. 對於此微分方程式 $x^2 y'' - 3xy' + 3y = 2x^4 e^x$, 下列何者錯誤?
- (A) 其解含有 x^3 項 (B) 其解含有 $x e^x$ 項 (C) 其解含有 $x^2 e^x$ 項
 (D) 其解含有 $x^2 e^{2x}$ 項

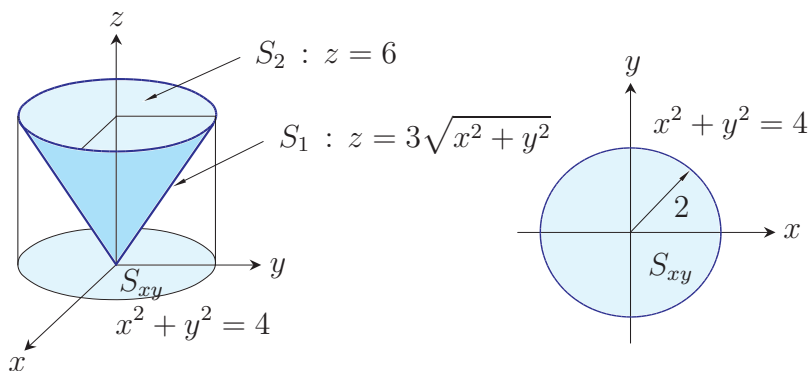
《喻超凡, 喻超弘 99 電力、電子、醫工高考》

《解》☞ (D); 因 ODE 的非齊次項為 $2x^4 e^x$, 故 ODE 不可能有 $x^2 e^{2x}$ 的特解。

6. 複變函數 $f(z) = \frac{1 - z^2}{\cos \frac{z}{2}}$ 在 $z = \pi$ 的留數 (residue) 為何? 其中 $i = \sqrt{-1}$

- (A) $\pi^2 - 1$ (B) $2(\pi^2 - 1)$ (C) $i - \pi^2$ (D) $2(i - \pi^2)$

《喻超凡, 喻超弘 99 電力、電子、醫工高考》



《解》

(1) 三重積分：令 V 投影到 xy 平面上的區域為 S_{xy} ，則 $S_{xy} : x^2 + y^2 = 4$ ，故

$$\begin{aligned}
 \iiint_V \nabla \cdot \vec{F} \, dv &= \iiint_V 3 \, dx dy dz \\
 &= \iint_{S_{xy}} \int_{z=3\sqrt{x^2+y^2}}^{z=6} 3 \, dz \, dx dy \\
 &= \iint_{S_{xy}} 3(6 - 3\sqrt{x^2+y^2}) \, dx dy \\
 &= \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{r=0}^{r=2} 3(6 - 3r) r \, dr \, d\theta \\
 &= 24\pi
 \end{aligned}$$

(2) 面積分：

(a) $S_1 : z = 3\sqrt{x^2 + y^2}$ ，令

$$\phi = x^2 + y^2 - \frac{z^2}{9} = 0$$

故 S_1 的單位法向量為

$$\vec{n} = \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} = \frac{x\vec{i} + y\vec{j} - \frac{z}{9}\vec{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + \frac{z^2}{81}}}$$

則

$$\vec{F} \cdot \vec{n} = (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \cdot \left(\frac{x\vec{i} + y\vec{j} - \frac{z}{9}\vec{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + \frac{z^2}{81}}} \right) = \frac{x^2 + y^2 - \frac{z^2}{9}}{\sqrt{x^2 + y^2 + \frac{z^2}{81}}} = 0$$

因此

$$\iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n} \, d\sigma = 0$$

(b) $S_2 : z = 6$, 且 $x^2 + y^2 = 4$, 故 S_2 的單位法向量為 $\vec{n} = \vec{k}$, 因此

$$\begin{aligned}\iint_{S_2} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma &= \iint_{S_2} (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \cdot \vec{k} d\sigma \\ &= \iint_{S_2} z d\sigma = \iint_{S_2} 6 d\sigma \\ &= 6 \times \pi \times 2^2 = 24\pi\end{aligned}$$

(c) 故

$$\iint_{S=S_1+S_2} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = \iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma + \iint_{S_2} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = 0 + 24\pi$$

(3) 由 (1)、(2) 可知

$$\iiint_V \nabla \cdot \vec{F} dv = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma$$

得証

3. 若 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, 試求 A^{1000} 。(10分)

《喻超凡, 喻超弘 99鐵路電力、電子特考》

《解》由 $\det(A - \lambda I) = 0$, 可得 A 的特徵值為 $\lambda = 1, 1$, 令

$$A^{1000} = \alpha A + \beta I$$

則

$$\begin{cases} 1^{1000} = \alpha + \beta \\ 1000 \times 1^{999} = \alpha \end{cases}$$

可解得 $\alpha = 1000$ 、 $\beta = -999$, 故

$$A^{1000} = 1000A - 999I = \begin{bmatrix} 1 & 1000 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4. 試應用留數定理 (Residue Theorem) , 計算下列積分

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1 + a \cos \theta} d\theta$$

其中 $-1 < a < 1$ 。(15分)

《喻超凡, 喻超弘 99鐵路電力、電子特考》

故

$$F_{X,Y}(-\infty, y) = 0$$

14. 若一系統由兩項獨立 (independent) 運作之組件構成，在任一組件正常運作下該系統即可正常運作，已知此兩項組件正常運作之機率分別為 0.8 及 0.4，試求此系統正常運作之機率？

(A) 0.12 (B) 0.32 (C) 0.68 (D) 0.88

《喻超凡，喻超弘 99 鐵路電力、電子特考》

《解》 (D)；此系統正常運作之機率為 $1 - (1 - 0.8) \times (1 - 0.4) = 0.88$

15. 若 $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ ， $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ ，下列函數何者可以定義為 $\mathbb{R}^2$ 上之一種內積？

(A) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1 v_1$ (B) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1^2 v_1^2 + u_2^2 v_2^2$ (C) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1 v_1 - u_2 v_2$
(D) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1 v_1 + 3u_2 v_2$ 《喻超凡，喻超弘 99 鐵路電力、電子特考》

《解》 (D)；滿足內積三個公理。

16. 設 A 、 B 及 C 為任三 $n \times n$ 矩陣，則下列敘述何者不恆真？

(A) 若 $\text{rank}(A) = n$ 且 $AB = AC$ ，則 $B = C$
(B) 若 $\text{rank}(A) = n$ 且 $AB = 0$ ，則 $B = 0$
(C) 若 $\text{rank}(A) = \text{rank}(B)$ ，則 $\text{rank}(A^2) = \text{rank}(B^2)$
(D) $\text{rank}(A) = \text{rank}(A^T)$ 《喻超凡，喻超弘 99 鐵路電力、電子特考》

《解》 (C)；例子為 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 、 $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ，故 $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 、 $B^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ，則
 $\text{rank}(A) = \text{rank}(B) = 1$ 但 $\text{rank}(A^2) = 1 \neq \text{rank}(B^2) = 0$

17. 若 S 為 $[1 \ 2 \ 1 \ 0], [0 \ 0 \ 0 \ 1]$ 所生成之子空間, 求 $\mathbb{R}^4$ 上 S 之正交補集 (Orthogonal Complement) :

- (A) 由 $[-2 \ 1 \ 0 \ 0], [-1 \ -1 \ 1 \ 0]$ 所生成之子空間
 (B) 由 $[-2 \ 1 \ 0 \ 0], [-1 \ 0 \ 1 \ 0]$ 所生成之子空間
 (C) 由 $[-2 \ 1 \ 0 \ 0], [-1 \ -1 \ 1 \ 1]$ 所生成之子空間
 (D) 由 $[-2 \ 1 \ 1 \ 0], [-1 \ -1 \ 1 \ 0]$ 所生成之子空間

《喻超凡, 喻超弘 99 鐵路電力、電子特考》

《解》 (B) ; 令

$$S = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

若 $x \in S^\perp$ 則

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x = 0$$

故

$$x = c_1 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

18. 若矩陣 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \\ a & 0 & 8 \end{bmatrix}$, 則下列何者正確?

- (A) 假如 $a = 8$ 則 $\text{rank}(A) = 2$, rank 為矩陣的秩數
 (B) 假如 $a = 8$ 則 $\text{rank}(A) = 3$, rank 為矩陣的秩數
 (C) 假如 $a = 1$ 則 $\text{rank}(A) = 2$, rank 為矩陣的秩數
 (D) 假如 $a = 3$ 則 $\text{rank}(A) = 2$, rank 為矩陣的秩數

《喻超凡, 喻超弘 99 鐵路電力、電子特考》

$$\operatorname{Res} f(\sqrt{2}i) = \frac{z^2}{2z(z^2+1)} \Big|_{z=\sqrt{2}i} = \frac{1}{\sqrt{2}i}$$

故

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+2)} dx &= 2\pi i \{ \operatorname{Res} f(i) + \operatorname{Res} f(\sqrt{2}i) \} \\ &= 2\pi i \left(-\frac{1}{2i} + \frac{1}{\sqrt{2}i} \right) \\ &= 2\pi \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \end{aligned}$$

4. 二維連續隨機變數 X 與 Y 的聯合機率密度函數 (joint probability density function) 為

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{18\pi} \exp\left(\frac{-x^2 - y^2 + 4x - 4y - 8}{18}\right), \quad -\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty$$

定義隨機變數 W 為 $W = 3X - 2Y$ 。

- (1) 求 X 與 Y 的邊際機率密度函數 (marginal probability density function) $f_X(x)$ 與 $f_Y(y)$ 。(10 分)
- (2) 求 W 的期望值 (Expected value)。(5 分)

《喻超凡, 喻超弘 99 安全局電子組》

《解》

(1)

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{18\pi} \exp\left\{\frac{-x^2 - y^2 + 4x - 4y - 8}{18}\right\} dy \\ &= \frac{1}{18\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{18}(x-2)^2\right\} \exp\left\{-\frac{1}{18}(y+2)^2\right\} dy \\ &= \frac{1}{18\pi} \exp\left\{-\frac{1}{18}(x-2)^2\right\} \times \sqrt{18\pi} \\ &= \frac{1}{\sqrt{18\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{18}(x-2)^2\right\} \quad (-\infty < x < \infty) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{18\pi} \exp\left\{\frac{-x^2 - y^2 + 4x - 4y - 8}{18}\right\} dx \\
&= \frac{1}{18\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{18}(x-2)^2\right\} \exp\left\{-\frac{1}{18}(y+2)^2\right\} dx \\
&= \frac{1}{18\pi} \exp\left\{-\frac{1}{18}(y+2)^2\right\} \times \sqrt{18\pi} \\
&= \frac{1}{\sqrt{18\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{18}(y+2)^2\right\} \quad (-\infty < y < \infty)
\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
E[X-2] &= \int_{-\infty}^{\infty} (x-2) f_X(x) dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} (x-2) \frac{1}{\sqrt{18\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{18}(x-2)^2\right\} dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} t \frac{1}{\sqrt{18\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{18}t^2\right\} dt \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E[Y+2] &= \int_{-\infty}^{\infty} (y+2) f_Y(y) dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} (y+2) \frac{1}{\sqrt{18\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{18}(y+2)^2\right\} dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} u \frac{1}{\sqrt{18\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{18}u^2\right\} du \\
&= 0
\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}
E[W] &= E[3X-2Y] \\
&= E[3(X-2)-2(Y+2)+10] \\
&= 3E[X-2]-2E[Y+2]+10 \\
&= 10
\end{aligned}$$

6. 99年電機技師高等考試

1. 求連續隨機產生兩個5，平均需多少個數目？(20分)

《喻超凡，喻超弘 99 電機技師》

《解》☞ 設產生一個 5 的機率為 p ，令隨機變數 X_1 為產生一個 5 所需數的數目，則 $X_1 \sim \text{Geo}(p)$ ，且 $E[X_1] = \frac{1}{p}$ ，再令隨機變數 X_2 為連續產生兩個 5 所需數的數目，則

$$P(X_2 = X_1 + 1 \mid X_1) = p$$

$$P(X_2 = X_1 + 1 + \tilde{X}_2 \mid X_1) = 1 - p$$

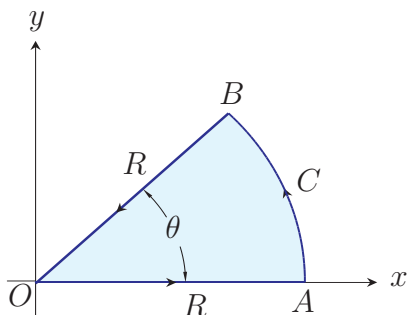
其中 $\tilde{X}_2 \stackrel{d}{=} X_2$ ，故 X_2 的期望值為

$$\begin{aligned} E[X_2] &= E[E[X_2 \mid X_1]] = E[(X_1 + 1)p + (X_1 + 1 + \tilde{X}_2)(1 - p)] \\ &= 1 + E[X_1] + (1 - p)E[X_2] \end{aligned}$$

$$\text{整理可得 } E[X_2] = \frac{1}{p}(1 + E[X_1]) = \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2}$$

2. (20分) 用複變理論 (complex variable theory) 計算下面之實數定積分 (real definite integral) : $\int_0^\infty \cos x^2 dx$

《喻超凡，喻超弘 99 電機技師》



《解》☞ 考慮一圍線 C (如圖) 的積分，因 e^{iz^2} 在 C 內為可解析函數，故

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \oint_C e^{iz^2} dz = \lim_{R \rightarrow \infty} \left[\int_{OA} e^{iz^2} dz + \int_{AB} e^{iz^2} dz + \int_{BO} e^{iz^2} dz \right] = 0 \quad (1)$$

8. 99年調查局調查人員電子科學組特考

1. 試解下列微分方程式在 $t > 0$ 的完全解：(15分)

$$\frac{dy}{dt} + 26y = u(t), \quad u(t) = \begin{cases} 6 \cos(15t) & , t \leq 0 \\ 12 \cos(15t) & , t > 0 \end{cases}$$

《喻超凡, 喻超弘 99調查局電子科學》

《解》☞ $t > 0$ 時, ODE 為

$$\frac{dy}{dt} + 26y = 12 \cos 15t$$

則積分因子為

$$I(t) = e^{\int 26 dt} = e^{26t}$$

故

$$Iy = \int e^{26t} \boxed{12 \cos 15t} dt = \frac{12}{901} e^{26t} (26 \cos 15t + 15 \sin 15t) + c$$

則

$$y(x) = \frac{12}{901} (26 \cos 15t + 15 \sin 15t) + c e^{-26t}$$

2. 試解下列微分方程式的完全解:(10分)

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \lambda^2 y = 0$$

其中 $\lambda > 0$, $y(-L) = y(L)$, $\frac{dy}{dx}(-L) = \frac{dy}{dx}(L)$

《喻超凡, 喻超弘 99調查局電子科學》

《解》☞ 因

$$y''(x) + \lambda^2 y(x) = 0 \quad (\lambda > 0)$$

可解得

$$a = \frac{1}{4}e^{2t}(-1 + e^{2t} - 2t), \quad b = e^{2t} - e^{4t} + 3e^{2t}t, \quad c = e^{4t} - 4e^{2t}t$$

4. 令 $f(x) = e^{-a|x|}$, $-1 \leq x \leq 1$, $a > 0$ 。試求 $f(x)$ 之 Fourier cosine integral。
(15分) 《喻超凡, 喻超弘 99調查局電子科學》

《解》☞ $f(x)$ 之 Fourier cosine integral 為

$$f(x) = \int_0^\infty A(w) \cos wx \, dw$$

其中

$$\begin{aligned} A(w) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f(x) \cos wx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^1 e^{-ax} \cos wx \, dx \\ &= \frac{2}{\pi} \frac{1}{a^2 + w^2} (-ae^{-ax} \cos wx + we^{-ax} \sin wx) \Big|_0^1 \\ &= \frac{2e^{-a}(ae^a - a \cos w + w \sin w)}{\pi(a^2 + w^2)} \end{aligned}$$

5. 若 z 為複數 (complex variable), 試計算積分 $\oint_C f(z) dz$, 其中 C 為圓 $|z| = 2$,
 $f(z) = \tan(z)$ 。(15分) 《喻超凡, 喻超弘 99調查局電子科學》

《解》☞ 因 $f(z) = \tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$, 則 $f(z)$ 在 C 內具有 $z = \pm \frac{\pi}{2}$ 的一階 poles, 且

$$\operatorname{Res} f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1, \quad \operatorname{Res} f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$$

故

$$\oint_C f(z) \, dz = 2\pi i \{ \operatorname{Res} f\left(\frac{\pi}{2}\right) + \operatorname{Res} f\left(-\frac{\pi}{2}\right) \} = -4\pi i$$

1. 100年公務人員電力、電子、醫學工程高考

甲、申論題部分 (50分)

1. 令 $f(t) = \begin{cases} 0 & , t < 3 \\ t+1 & , t \geq 3 \end{cases}$, 試求 $f(t)$ 之拉氏轉換 (Laplace transform)。(10分)

《喻超凡, 喻超弘 100電力、電子、醫工高考》

《解》 因

$$f(t) = \begin{cases} 0 & , t < 3 \\ t+1 & , t \geq 3 \end{cases} = (t+1)H(t-3)$$

故

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{(t+1)H(t-3)\} = e^{-3s} \mathcal{L}\{t+3+1\} = e^{-3s} \left(\frac{1}{s^2} + \frac{4}{s} \right)$$

2. 設矩陣 $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$,

(1) 求 A 的特徵值 (eigenvalues)。(5分)

(2) 求 A 的特徵向量 (eigenvectors)。(5分)

(3) 求 A^{100} 。(5分)

《喻超凡, 喻超弘 100電力、電子、醫工高考》

《解》

(1) 由 $\det(A - \lambda I) = 0$, 可得特徵值為 $\lambda = 6, 2$ 。

(2) 將 $\lambda = 6$ 代回 $(A - \lambda I)X = 0$ 中可得

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

可得對應的特徵向量為

$$X = c_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (c_1 \neq 0)$$

(2) 特解：

$$\begin{aligned}
 y_p &= \frac{1}{(D-1)(D-2)(D-3)} t e^{4t} \\
 &= e^{4t} \frac{1}{(D+3)(D+2)(D+1)} t \\
 &= e^{4t} \left(\frac{1}{6} - \frac{11}{36} D + \dots \right) t \\
 &= e^{4t} \left(\frac{1}{6} t - \frac{11}{36} \right) = x^4 \left(\frac{1}{6} \ln x - \frac{11}{36} \right)
 \end{aligned}$$

(3) 通解： $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$

4. (10分) 設 $\vec{v} = xy \vec{i} - 4 \vec{j} + zy \vec{k}$ 及 $A = (0, 1, 0)$ 、 $B = (2, 0, 1)$ 、 $D = (3, 2, 1)$ 等三點，若 C 為由 A 到 B 及 B 到 D 兩直線線段所組成。求

$$\int_C \vec{v} \cdot d\vec{r} = \int_C (xy dx - 4 dy + zy dz) = ?$$

《喻超凡，喻超弘 100 電力、電子、醫工高考》

《解》 令 $C = C_1 + C_2$ ，其中 C_1 為 AB 的直線， C_2 為 BD 的直線。

(a) C_1 的參數式為

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = 1 - t \\ z = t \end{cases} ; t = 0 \sim 1$$

故

$$\int_{C_1} (xy dx - 4 dy + zy dz) = \int_{t=0}^{t=1} 2t(1-t) 2dt - 4d(-t) + t(1-t) dt = \frac{29}{6}$$

(b) C_2 的參數式為

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 2t \\ z = 1 \end{cases} ; t = 0 \sim 1$$

故

$$\int_{C_2} (xy dx - 4 dy + zy dz) = \int_{t=0}^{t=1} (2+t)(2t) dt - 4 \times 2dt = -\frac{16}{3}$$

(c)

$$\begin{aligned} & \int_{C=C_1+C_2} (xy \, dx - 4 \, dy + zy \, dz) \\ &= \int_{C_1} (xy \, dx - 4 \, dy + zy \, dz) + \int_{C_2} (xy \, dx - 4 \, dy + zy \, dz) \\ &= \frac{29}{6} - \frac{16}{3} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

2. 設 $y_1(x)$ 及 $y_2(x)$ 是微分方程式 $A: y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ 的解, 而 $y_3(x)$ 及 $y_4(x)$ 是微分方程式 $B: y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$ 的解, 則下列敘述何者錯誤?
(題中 $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$ 為 x 的函數, 且 $r(x) \neq 0$)
- (A) $c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ 必定也是微分方程式 A 的解 (其中 c_1 及 c_2 為任意常數)
(B) $y_3(x) - y_4(x)$ 必定也是微分方程式 A 的解
(C) $y_3(x) + y_4(x)$ 必定也是微分方程式 B 的解
(D) $c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + y_3(x)$ 必定也是微分方程式 B 的解

《喻超凡, 喻超弘 100 電力、電子、醫工高考》

《解》 (C); 非齊次方程式的解相加, 不是原方程式的解。

3. 假設函數 $F(s) = \frac{4s^2 + 2}{s^3 + 3s^2 + 2s}$ 之逆拉氏轉換 (inverse Laplace transform) 為 $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = a + be^{-t} + ce^{-2t}$, 其中 a 、 b 、 c 為常數, 求 $a + b + c$?
- (A) -3 (B) 2 (C) 3 (D) 4

《喻超凡, 喻超弘 100 電力、電子、醫工高考》

《解》 (D)

$$F(s) = \frac{4s^2 + 2}{s(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s} - \frac{6}{s+1} + \frac{9}{s+2}$$

故

$$a + b + c = 1 - 6 + 9 = 4$$

4. 求複數函數積分 $\int_C e^{z+i} dz$ 之值, 其中積分路徑 C 的參數式為 $z(t) = 2e^{i2t}$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$, 其中 $i = \sqrt{-1}$,
- (A) $(e^{-2} - e^2)(\cos 1 + i \sin 1)$ (B) $(e^{-2} + e^2)(\cos 1 + i \sin 1)$
(C) $(e^{-2} - e^2)(\cos 1 - i \sin 1)$ (D) $(e^{-2} + e^2)(\cos 1 - i \sin 1)$

《喻超凡, 喻超弘 100 電力、電子、醫工高考》

《解》 (A) , $t = 0$ 時 $z = 2$, $t = \frac{\pi}{2}$ 時 $z = 2e^{\pi i} = -2$, 故

$$\int_C e^{z+i} dz = \int_2^{-2} e^{z+i} dz = e^i e^z \Big|_{z=2}^{-2} = (e^{-2} - e^2)(\cos 1 + i \sin 1)$$

5. 解微分方程式 $y' - 3y = -6y^2$, $y(0) = -1$ (其中 $y' = \frac{dy}{dx}$) :

(A) $y = 1/(2 - 3e^{3x})$ (B) $y = 1/(2 - 3e^{-3x})$

(C) $y = 1/(1 - 2e^{3x})$ (D) $y = 1/(1 - 2e^{-3x})$

《喻超凡, 喻超弘 100 電力、電子、醫工高考》

《解》 (B) , 原式可改寫成

$$y^{-2}y' - 3y^{-1} = -6$$

令 $u = y^{-1}$, 故 $\frac{du}{dx} = -y^{-2}y'$, 代回上式可得

$$\frac{du}{dx} + 3u = 6$$

積分因子為 $I = e^{3x}$, 故

$$I u(x) = \int 6 e^{3x} dx = 2e^{3x} + c$$

則

$$u(x) = y^{-1}(x) = 2 + c e^{-3x}$$

再由

$$y(0) = -1 = \frac{1}{2 + c} \Rightarrow c = -3$$

故

$$y(x) = \frac{1}{2 - 3e^{-3x}}$$

6. 試求向量場 $\vec{v} = \sinh(x - z)\vec{i} + 2y\vec{j} + (z - y^2)\vec{k}$ 的散度 (divergence) :

(A) $\cosh(x - z) + 3$ (B) $\cosh(x - z) + 4$ (C) $\cosh x + 3$ (D) $\cosh x + 2 + z$

《喻超凡, 喻超弘 100 電力、電子、醫工高考》

《解》 (A)

$$\operatorname{div}(\vec{v}) = \nabla \cdot \vec{v} = \cosh(x-z) + 2 + 1 = \cosh(x-z) + 3$$

7. $\vec{u} = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ 、 $\vec{v} = -\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$ 為兩個三維向量，以下那一個是 $\vec{u} \times \vec{v}$?
 (A) 向量 $\vec{w} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ (B) 純量 3 (C) 純量 1 (D) 向量 $\vec{w} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$
 《喻超凡，喻超弘 100 電力、電子、醫工高考》

《解》 (D)

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$$

8. 複變函數 $f(z) = \frac{4i}{z^2 + 4}$ 以 $2i$ 為中心展開的羅倫級數 (Laurent series) 為何?
 其中 $i = \sqrt{-1}$ 。
 (A) $\frac{1}{z-2i} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{i}{4}\right)^{n+1} (z-2i)^n$ (B) $-\frac{1}{z-2i} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{i}{4}\right)^{n+1} (z-2i)^n$
 (C) $\frac{1}{z-2i} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{i}{4}\right)^n (z-2i)^n$ (D) $-\frac{1}{z-2i} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{i}{4}\right)^n (z-2i)^n$
 《喻超凡，喻超弘 100 電力、電子、醫工高考》

《解》 (A)，令 $u = z - 2i$ ，故

$$\begin{aligned} \frac{4i}{z^2 + 4} &= \frac{4i}{(z-2i)(z+2i)} = \frac{4i}{u(u+4i)} \\ &= \frac{1}{u} - \frac{1}{u+4i} = \frac{1}{u} - \frac{1}{4i} \frac{1}{1 + \frac{u}{4i}} \\ &= \frac{1}{u} - \frac{1}{4i} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{u}{4i}\right)^n = \frac{1}{u} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{4i}\right)^{n+1} u^n \\ &= \frac{1}{z-2i} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{i}{4}\right)^{n+1} (z-2i)^n \end{aligned}$$

15. 給定一個常態分佈 (Normal Distribution) 的隨機變數 X ，它的期望值 (mean) 為 0，變異值 (variance) 為 5。已知 $P(X > C) = 0.05$ ，也就是 X 大於 C 的機率為 0.05。求 $P(-C < X < C)$ 之值為何？

(A) 0.90 (B) 0.95 (C) 0.975 (D) 0.995

《喻超凡，喻超弘 100 電力、電子、醫工高考》

《解》☞ (A)，因 $\mu = 0$ ，故 X 的圖形為對稱 y 軸，則

$$P(-C < X < C) = 2P(0 < X < C) = 2\left\{\frac{1}{2} - P(X > C)\right\} = 2\left(\frac{1}{2} - 0.05\right) = 0.9$$

16. 若 X 為一連續隨機變數 (continuous random variable)，其機率密度函數 (probability density function) 為

$$f_X(x) = \begin{cases} kx(1-x) & , 0 < x < 1 \\ 0 & , \text{其他} \end{cases}$$

試求 $k = ?$

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 6

《喻超凡，喻超弘 100 電力、電子、醫工高考》

《解》☞ (D)

$$\int_0^1 f_X(x) dx = \int_0^1 kx(1-x) dx = k\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = k \times \frac{1}{6} = 1$$

故 $k = 6$

17. 求 $\lim_{z \rightarrow 2e^{\pi i/3}} \frac{z^3 + 8}{z^4 + 4z^2 + 16}$ 之值為何？

(A) $\frac{3}{8} - \frac{\sqrt{3}}{8}i$ (B) $\frac{1}{8} - \frac{\sqrt{3}}{8}i$ (C) $\frac{3}{8} + \frac{\sqrt{3}}{8}i$ (D) $\frac{1}{8} + \frac{\sqrt{3}}{8}i$

《喻超凡，喻超弘 100 電力、電子、醫工高考》

《解》 (A)

$$\begin{aligned}
 \lim_{z \rightarrow 2e^{\pi i/3}} \frac{z^3 + 8}{z^4 + 4z^2 + 16} &= \lim_{z \rightarrow 2e^{\pi i/3}} \frac{3z^2}{4z^3 + 8z} = \lim_{z \rightarrow 2e^{\pi i/3}} \frac{3z}{4z^2 + 8} \\
 &= \frac{3 \times 2e^{\pi i/3}}{4 \times (2e^{\pi i/3})^2 + 8} = \frac{3 \times 2 \times (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)}{16(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i) + 8} \\
 &= \frac{3(1 + \sqrt{3}i)}{8\sqrt{3}i} = \frac{3}{8} - \frac{\sqrt{3}}{8}i
 \end{aligned}$$

18. 請計算 $\frac{2^{12}}{(1-i)^{20}}$ 之值，其中 $i = \sqrt{-1}$ 。

(A) $-4 + 4i$ (B) $4i$ (C) -4 (D) 4

《喻超凡，喻超弘 100 電力、電子、醫工高考》

《解》 (C)

$$\frac{2^{12}}{(1-i)^{20}} = \frac{2^{12}}{(\sqrt{2} e^{-\pi i/4})^{20}} = \frac{2^{12}}{2^{10}} e^{5\pi i} = -4$$

19. 若 $\psi(x, y, z) = xy - yz + xyz$ ，則其在點 $P = (0, -1, 1)$ 之最大改變率 (rate of change) 之值為何？

(A) -2 (B) 2 (C) $\sqrt{5}$ (D) $\sqrt{6}$

《喻超凡，喻超弘 100 電力、電子、醫工高考》

《解》 (D)

$$\nabla\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\psi}{\partial z}\vec{k} = (y + yz)\vec{i} + (x - z - xz)\vec{j} + (-y + xy)\vec{k}$$

故

$$\nabla\psi(0, -1, 1) = -2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$$

最大改變率 $|\nabla\psi(0, -1, 1)| = \sqrt{6}$

《解》 (A)

$$\begin{aligned}
 \lim_{z \rightarrow 2e^{\pi i/3}} \frac{z^3 + 8}{z^4 + 4z^2 + 16} &= \lim_{z \rightarrow 2e^{\pi i/3}} \frac{3z^2}{4z^3 + 8z} = \lim_{z \rightarrow 2e^{\pi i/3}} \frac{3z}{4z^2 + 8} \\
 &= \frac{3 \times 2e^{\pi i/3}}{4 \times (2e^{\pi i/3})^2 + 8} = \frac{3 \times 2 \times (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)}{16(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i) + 8} \\
 &= \frac{3(1 + \sqrt{3}i)}{8\sqrt{3}i} = \frac{3}{8} - \frac{\sqrt{3}}{8}i
 \end{aligned}$$

18. 請計算 $\frac{2^{12}}{(1-i)^{20}}$ 之值，其中 $i = \sqrt{-1}$ 。

(A) $-4 + 4i$ (B) $4i$ (C) -4 (D) 4

《喻超凡，喻超弘 100 電力、電子、醫工高考》

《解》 (C)

$$\frac{2^{12}}{(1-i)^{20}} = \frac{2^{12}}{(\sqrt{2} e^{\pi i/4})^{20}} = \frac{2^{12}}{2^{10}} e^{-5\pi i} = -4$$

19. 若 $\psi(x, y, z) = xy - yz + xyz$ ，則其在點 $P = (0, -1, 1)$ 之最大改變率 (rate of change) 之值為何？

(A) -2 (B) 2 (C) $\sqrt{5}$ (D) $\sqrt{6}$

《喻超凡，喻超弘 100 電力、電子、醫工高考》

《解》 (D)

$$\nabla \psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \vec{k} = (y + yz) \vec{i} + (x - z - xz) \vec{j} + (-y + xy) \vec{k}$$

故

$$\nabla \psi(0, -1, 1) = -2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$$

最大改變率 $|\nabla \psi(0, -1, 1)| = \sqrt{6}$

《解》☞ (B) ; 方程式可改寫成

$$y'' + y' - \frac{2}{x^2} y = 0$$

故 $P(x) = 1$ 、 $Q(x) = -\frac{2}{x^2}$, 則

$$p_0 = \lim_{x \rightarrow 0} x P(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$$

$$q_0 = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 Q(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (-2) = -2$$

則 indicial 方程式為

$$r(r-1) + p_0 r + q_0 = r(r-1) - 2 = 0$$

15. 求 $\frac{d}{dz}\{z \tan^{-1}(\ln z)\}$

(A) $\frac{1}{(\ln z)^2} + \tan^{-1}(\ln z)$ (B) $\frac{1}{1 + (\ln z)^2} + \tan^{-1}(\ln z)$

(C) $\tan^{-1}(\ln z)$ (D) $\frac{1}{\ln z} + \tan^{-1}(\ln z)$

《喻超凡, 喻超弘 100 電力、電子身障特考》

《解》☞ (B) ;

$$\frac{d}{dz}\{z \tan^{-1}(\ln z)\} = \tan^{-1}(\ln z) + z \frac{1}{1 + (\ln z)^2} \frac{1}{z} = \tan^{-1}(\ln z) + \frac{1}{1 + (\ln z)^2}$$

16. 設 z 為複數, 下列敘述何者為正確?

(A) $|e^{z^2}| \leq e^{|z|^2}$ (B) $\cos(i\bar{z}) \neq \overline{\cos(iz)}$

(C) 對於複數平面任何兩點, 公式 $\text{Arg}(z_1 z_2) = \text{Arg}(z_1) + \text{Arg}(z_2)$ 皆成立, 其中 $\text{Arg}(z)$ 表示複數 z 的主幅解 (principal argument)

(D) 函數 $\sin \bar{z}$ 在 $z = 0$ 時為可析函數 (analytic function)

《喻超凡, 喻超弘 100 電力、電子身障特考》

(1) 原點在 C 外：設 C 為簡單的封閉曲線，且其所圍的區域為 D ，同時

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{F} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{-y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} & 0 \end{vmatrix} \\ &= \left\{ \frac{(x^2+y^2) - 2x^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{(x^2+y^2) - 2y^2}{(x^2+y^2)^2} \right\} \vec{k} \\ &= 0\end{aligned}$$

因 $\vec{F}$ 在 D 中函數及其一階偏導為連續，故 $\vec{F}$ 為保守場，則

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{R} = 0$$

(2) 原點在 C 內：令

$$C : \begin{cases} x = \rho(\theta) \cos \theta \\ y = \rho(\theta) \sin \theta \end{cases} ; \theta = 0 \sim 2\pi$$

故

$$\begin{aligned}\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{R} &= \oint_C \frac{-y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy \\ &= \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \frac{-\rho(\theta) \sin \theta}{\rho^2} d(\rho(\theta) \cos \theta) + \frac{\rho(\theta) \cos \theta}{\rho^2} d(\rho(\theta) \sin \theta) \\ &= \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \frac{1}{\rho} \{ -\sin \theta (\cos \theta d\rho - \rho \sin \theta d\theta) + \cos \theta (\sin \theta d\rho + \rho \cos \theta d\theta) \} \\ &= \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} d\theta \\ &= 2\pi\end{aligned}$$

4. 假設隨機變數 X 的累積分布函數 (cumulative distribution function) $F(x)$ 為

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , x < 1 \\ 0.25 & , 1 \leq x < 4 \\ 0.5 & , 4 \leq x < 5 \\ 0.75 & , 5 \leq x < 7 \\ 1 & , 7 \leq x \end{cases}$$

(1) 試求 $P(X = 5)$ 。(3分)

(2) 試求 $P(X > 3)$ 。(3分)

(3) 試求 $P(2.5 < X < 6)$ 。(4分) 《喻超凡, 喻超弘 100 鐵路電力、電子特考》

《解》

$$(1) P(X = 5) = F(5) - F(5^-) = 0.75 - 0.5 = 0.25$$

$$(2) P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - F(3) = 1 - 0.25 = 0.75$$

$$(3) P(2.5 < X < 6) = F(6^-) - F(2.5) = 0.75 - 0.25 = 0.5$$

乙、測驗題部分 (50 分)

1. 若 $F(s)$ 為 $f(t)$ 之拉普拉斯轉換, $F(s) = \frac{0.1s + 0.9}{s^2 + 3.24}$ 則 $f(t)$ 為何?

- (A) $f(t) = 0.1 + 0.9t$ (B) $f(t) = 0.1 + 0.9te^{-3.24t}$
 (C) $f(t) = 0.1 \cos 1.8t + 0.9 \sin 1.8t$ (D) $f(t) = 0.1 \cos 1.8t + 0.5 \sin 1.8t$

《喻超凡, 喻超弘 100 鐵路電力、電子特考》

《解》 (D);

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{0.1s + 0.9}{s^2 + 3.24}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{0.1s + 0.9}{s^2 + (1.8)^2}\right\} = 0.1 \cos 1.8t + 0.5 \sin 1.8t$$

2. 下列何者不是正合微分方程式 (exact differential equation) ?

- (A) $e^{-2\theta}(r dr - r^2 d\theta) = 0$ (B) $2xy dy = (x^2 + y^2)dx$
 (C) $2xy dx + x^2 dy = 0$ (D) $2(\sin 2x)(\sinh y)dx - (\cos 2x)(\cosh y) dy = 0$

《喻超凡, 喻超弘 100 鐵路電力、電子特考》

《解》 (B); 因 ODE 為

$$(x^2 + y^2)dx - 2xy dy = 0$$

令

$$M = x^2 + y^2, N = -2xy$$

因

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2y \neq \frac{\partial N}{\partial x} = -2y$$

故 ODE 不為正合

5. 求解微分方程 $y' = \cosh 4x$ ，其解為下列何者？

(A) $y = \frac{\sinh 4x}{4} + c$ (B) $y = \frac{\tanh 4x}{4} + c$

(C) $y = \frac{\coth 4x}{4} + c$ (D) $y = \frac{\cosh 4x}{4} + c$

《喻超凡，喻超弘 100 鐵路電力、電子特考》

《解》☞ (A)；

$$y(x) = \int \cosh 4x \, dx = \frac{\sinh 4x}{4} + c$$

6. 求解微分方程 $y'' - 4\pi y' + 4\pi^2 y = 0$ ，其解為下列何者？

(A) $y = (c_1 + c_2 x)e^{-2\pi x}$ (B) $y = (c_1 + c_2 x)x e^{-2\pi x}$

(C) $y = (c_1 + c_2 x)e^{2\pi x}$ (D) $y = (c_1 + c_2 x)x e^{2\pi x}$

《喻超凡，喻超弘 100 鐵路電力、電子特考》

《解》☞ (C)；令 $y = e^{mx}$ 代回 ODE 中可得

$$m^2 - 4\pi + 4\pi^2 = 0 \Rightarrow m = 2\pi, 2\pi$$

故

$$y(x) = (c_1 + c_2 x)e^{2\pi x}$$

7. 下列那一個複數函數不是可解析函數？

(A) $f(z) = \sin z$ (B) $f(z) = \cos z$ (C) $f(z) = e^{-z}$ (D) $f(z) = |z|^2$

《喻超凡，喻超弘 100 鐵路電力、電子特考》

《解》☞ (D)；函數 f 中有 $\bar{z}$ 變數，必不可解析，因 $f(z) = |z|^2 = z\bar{z}$ ，故不可解析。

17. 下列何者為赫密特 (Hermitian) 矩陣 ?

(A) $A = \begin{bmatrix} i & 1+i \\ -1+i & 0 \end{bmatrix}$ (B) $A = \begin{bmatrix} i & 1+i \\ 1-i & 0 \end{bmatrix}$ (C) $A = \begin{bmatrix} 7 & 1+i \\ 1-i & 6 \end{bmatrix}$
 (D) $A = \begin{bmatrix} i & 1+i \\ 1-i & -i \end{bmatrix}$

《喻超凡, 喻超弘 100鐵路電力、電子特考》

《解》 (C) ; 赫密特矩陣對角線元素均為實數

18. 隨機變數 X 、 Y 之結合機率密度函數 (joint probability density function) 為

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{8}(x+y) & , 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2 \\ 0 & , \text{其他} \end{cases}$$

下列各期望值何者正確 ?

(A) $E[XY] = \frac{4}{3}$ (B) $E[Y] = \frac{5}{8}$ (C) $E[X] = \frac{5}{6}$ (D) $E[XY] = E[X]E[Y]$

《喻超凡, 喻超弘 100鐵路電力、電子特考》

《解》 (A) ;

(A)

$$E[XY] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy f_{X,Y}(x, y) dx dy = \int_{x=0}^{x=2} \int_{y=0}^{y=2} xy \frac{1}{8}(x+y) dy dx = \frac{4}{3}$$

(B)

$$E[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y f_{X,Y}(x, y) dx dy = \int_{x=0}^{x=2} \int_{y=0}^{y=2} y \frac{1}{8}(x+y) dy dx = \frac{7}{6}$$

(C)

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X,Y}(x, y) dx dy = \int_{x=0}^{x=2} \int_{y=0}^{y=2} x \frac{1}{8}(x+y) dy dx = \frac{7}{6}$$

$$(D) E[XY] = \frac{4}{3} \neq E[X]E[Y] = \frac{7}{6} \times \frac{7}{6}$$

《解》 令

$$\phi(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 = 0$$

因

$$\nabla\phi = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} - 2z\vec{k}$$

故曲面在 P_0 點處的法向量爲

$$\vec{n} = \nabla\phi(P_0) = 2\vec{i} + 2\vec{j} - 2\sqrt{2}\vec{j}$$

(1) 在 P_0 處的切平面爲

$$2(x-1) + 2(y-1) - 2\sqrt{2}(z-\sqrt{2}) = 0$$

即

$$x + y - \sqrt{2}z = 0$$

(2) 在 P_0 處的法線方程式爲

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + t \\ z = \sqrt{2} - \sqrt{2}t \end{cases}$$

(3) 因曲線 C 的位置向量爲

$$\vec{r}(t) = \cos t\vec{i} + \sin t\vec{j} + \vec{k}$$

且

$$\vec{r}'(t) = -\sin t\vec{i} + \cos t\vec{j} \Rightarrow |\vec{r}'(t)| = 1$$

$$\vec{r}''(t) = -\cos t\vec{i} - \sin t\vec{j}$$

故

$$\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t) = \vec{k}$$

因此

$$\kappa = \frac{|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)|}{|\vec{r}'(t)|^3} = 1$$

乙、測驗題部分 (50分)

1. 已知微分方程式 $y'' + \alpha y' + \beta y = 0$ 的通解為 $y(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-3x}$ ，試求 α 及 β 之值，並判定下列何者正確？(題中 α 、 β 、 c_1 及 c_2 為常數)

(A) $\alpha + \beta = -11$ (B) $\alpha + \beta = 11$ (C) $\alpha + \beta = -5$ (D) $\alpha + \beta = 5$

《喻超凡，喻超弘 100 安全局電子組》

《解》☞ (B)；令 $y = e^{mx}$ 代回 ODE 中可得

$$m^2 + \alpha m + \beta = 0$$

已知 ODE 的通解為

$$y(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-3x}$$

故 $m = -2$ 、 -3 ，則

$$\alpha = -\{(-2) + (-3)\} = 5, \beta = (-2)(-3) = 6$$

則 $\alpha + \beta = 5 + 6 = 11$

2. 下列何者可為 $\frac{dy}{dx} + 2xy = 4x$ 之解？

(A) $y = e^{-x^2}$ (B) $y = 1 + e^{-x^2}$ (C) $y = 2 + e^{-x^2}$ (D) $y = 3 + e^{-x^2}$

《喻超凡，喻超弘 100 安全局電子組》

《解》☞ (C)；因 ODE 的特解為 $y_p(x) = 2$

3. 設微分方程式 $y' + ay = 0$ ， $y(0) = y_0$ 的級數解 (series solution) 為

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3x)^n}{n!}, \text{ 試求常數 } a \text{ 及 } y_0 \text{ 之值，並判定下列何者正確？}$$

(A) $a + y_0 = 2$ (B) $a + y_0 = 3$ (C) $a + y_0 = 4$ (D) $a + y_0 = 5$

《喻超凡，喻超弘 100 安全局電子組》

再由 $y(0) = \frac{\pi}{3} = c$, 故 ODE 的解為

$$y = \frac{\pi}{3} \sec x$$

6. 請找出何者為曲線 $y = \frac{c}{x^2}$ 的正交曲線？

(A) $x^2 + 2y^2 = k$ (B) $x^2 - 2y^2 = k$ (C) $x^2 - 2y^2 + x = k$ (D) $x^2 - 2y^2 - x = k$

《喻超凡, 喻超弘 100 地方特考電力、電子、電信工程》

《解》 (B) ; 令 $F(x, y) = yx^2 = c$, 故正交曲線滿足

$$\frac{dy}{dx} = \frac{F_y}{F_x} = \frac{x^2}{2xy} = \frac{x}{2y}$$

即

$$2y dy = x dx$$

兩端積分可得

$$y^2 = \frac{1}{2}x^2 + c_1 \Rightarrow x^2 - 2y^2 = k$$

7. 有一個線性轉換 $T(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + 3x_2 + x_3, 3x_1 + 3x_2 + x_3, 2x_1 + 4x_2 + x_3)$, 下面那一項是 $T^{-1}(x_1, x_2, x_3)$?

(A) $(x_1 + x_2, x_1 + x_3, 6x_1 + 2x_2 - 3x_3)$ (B) $(-x_1 + x_2, -x_1 + x_3, 6x_1 + 2x_2 - 3x_3)$
(C) $(x_1 + x_2, x_1 + x_3, 6x_1 - 2x_2 - 3x_3)$ (D) $(-x_1 + x_2, -x_1 + x_3, 6x_1 - 2x_2 - 3x_3)$

《喻超凡, 喻超弘 100 地方特考電力、電子、電信工程》

《解》 (D) ;

$$T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 + 3x_2 + x_3 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

令

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

《解》☞ (D) ; 實對稱矩陣必可對角化

10. 若 0 為矩陣 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ 的特徵值, 請問 α 為何值 ?
 (A) 1 (B) $\frac{3}{2}$ (C) 2 (D) $\frac{5}{2}$

《喻超凡, 喻超弘 100 地方特考電力、電子、電信工程》

《解》☞ (B) ; 若 0 為矩陣的特徵值, 則

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -3 + 2\alpha = 0$$

$$\text{故 } \alpha = \frac{3}{2}$$

11. 兩連續隨機變數 X 、 Y 之結合機率密度函數 (joint probability density function) 為

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{8}(x+y) & , 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2 \\ 0 & , \text{其他} \end{cases}$$

則協方差 (covariance) $\text{Cov}(X, Y) = ?$

- (A) $-\frac{1}{36}$ (B) $-\frac{3}{28}$ (C) $-\frac{5}{24}$ (D) $-\frac{1}{39}$

《喻超凡, 喻超弘 100 地方特考電力、電子、電信工程》

《解》☞ (A) ;

$$E[XY] = \iint_D xy f_{X,Y}(x, y) dx dy = \int_{x=0}^{x=2} \int_{y=0}^{y=2} xy \frac{1}{8}(x+y) dy dx = \frac{4}{3}$$

$$E[X] = \iint_D x f_{X,Y}(x, y) dx dy = \int_{x=0}^{x=2} \int_{y=0}^{y=2} x \frac{1}{8}(x+y) dy dx = \frac{7}{6}$$

$$E[Y] = \iint_D y f_{X,Y}(x, y) dx dy = \int_{x=0}^{x=2} \int_{y=0}^{y=2} y \frac{1}{8}(x+y) dy dx = \frac{7}{6}$$

故

$$\text{Cov}(X, Y) = E[XY] - E[X]E[Y] = \frac{4}{3} - \frac{7}{6} \times \frac{7}{6} = -\frac{1}{36}$$

12. 考慮一波式 (Poisson) 分布之離散隨機變數 (discrete random variable) X , 其值為 k 之機率是 $P\{X = k\} = e^{-3} \frac{3^k}{k!}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, 試求其均值 (mean) $E[X] = ?$
 (A) 3 (B) 6 (C) 9 (D) 12

《喻超凡, 喻超弘 100 地方特考電力、電子、電信工程》

《解》 (A) ;

$$\begin{aligned} E[X] &= \sum_{x=0}^{\infty} x P\{X = x\} = \sum_{x=0}^{\infty} x e^{-3} \frac{3^x}{x!} \\ &= e^{-3} \sum_{x=1}^{\infty} \frac{3^x}{(x-1)!} = e^{-3} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{3^{x+1}}{x!} \\ &= e^{-3} \times 3 \times e^3 = 3 \end{aligned}$$

13. 一公正的骰子被擲 10 次, 若點數 2 出現 3 次之機率為 $(\frac{10!}{a!b!})(\frac{c^d}{6^{10}})$, 則
 $a + b + c + d = ?$

(A) 15 (B) 20 (C) 21 (D) 22

《喻超凡, 喻超弘 100 地方特考電力、電子、電信工程》

《解》 (D)

$$\text{數 2 出現 3 次之機率為 } = C_3^{10} \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^7 = \frac{10!}{7!3!} \times \frac{5^7}{6^{10}}$$

故 $a = 7$ 、 $b = 3$ 、 $c = 5$ 、 $d = 7$, 則

$$a + b + c + d = 7 + 3 + 5 + 7 = 22$$

19. 有一曲線之參數方程式為 $x = 10 \sin t$, $y = 10 \cos t$, 其中 $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$, 請問該曲線弧長為何?

(A) 5π (B) 10π (C) 15π (D) 20π

《喻超凡, 喻超弘 100 地方特考電力、電子、電信工程》

《解》 (B); 曲線 C 的位置向量為

$$\vec{r}(t) = x\vec{i} + y\vec{j} = 10 \sin t \vec{i} + 10 \cos t \vec{j}$$

故

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = 10 \cos t \vec{i} - 10 \sin t \vec{j}$$

因此

$$ds = \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| dt = \sqrt{(10 \cos t)^2 + (10 \sin t)^2} dt = 10 dt$$

則曲線的弧長為

$$s = \int_C ds = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 10 dt = 10\pi$$

20. 有三個向量 $\vec{a} = [-1, 2, 0]$, $\vec{b} = [2, 3, 1]$, $\vec{c} = [5, -7, 2]$, 求 $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = ?$
(A) 11 (B) -11 (C) 10 (D) -10

《喻超凡, 喻超弘 100 地方特考電力、電子、電信工程》

《解》 (B);

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \begin{vmatrix} 5 & -7 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -11$$

(3) 將 $x = 0$ 代回 (1) 式, 中可得

$$\frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \cos n\pi}{n^2} = f(0) = 0$$

即

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{3}$$

即

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

2. (1) 若 λ 是一個非奇異 (nonsingular) 矩陣 A 的特徵值 (eigenvalue), X 是 λ 對應的特徵向量 (eigenvector), 請證明 $\frac{1}{\lambda}$ 及 X 分別是 A^{-1} 的特徵值及其對應的特徵向量。(10分)

(2) 若 $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, 請用其最大的特徵值証 (1) 的結果。(5分)

《喻超凡, 喻超弘 101 電力、電子、電信高考》

《解》

(1) 因 λ 為矩陣 A 的特徵值, 且對應的特徵向量為 X , 則

$$AX = \lambda X$$

即

$$\frac{1}{\lambda}X = A^{-1}X$$

故 A^{-1} 的特徵值為 $\frac{1}{\lambda}$, 且對應的特徵向量仍為 X 。

(2) 由 $\det(A - \lambda I) = 0$, 可得 A 的特徵值為 $\lambda = 2, 2, 1$, 將 $\lambda = 2$ 代回 $(A - \lambda I)X = 0$ 中可得

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

可得對應的特徵向量為

$$X = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (c_1, c_2 \text{ 不全為 } 0)$$

因

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

由 $\det(A^{-1} - \lambda I) = 0$ 可得 A^{-1} 的特徵值為 $\lambda = \frac{1}{2}$ 、 $\frac{1}{2}$ 、 1 ，將 $\lambda = \frac{1}{2}$ 代回 $(A^{-1} - \lambda I)V = 0$ 中可得

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

故對應的特徵向量為

$$V = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (c_1, c_2 \text{ 不全為 } 0)$$

故 $\lambda = 2$ 為 A 的特徵值，則 $\lambda = \frac{1}{2}$ 為 A^{-1} 的特徵值，且對應的特徵向量均為

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (c_1, c_2 \text{ 不全為 } 0)$$

3. (10分) 藉由考慮級數 $\sum_{n=1}^{\infty} z^n$ 之收斂性，證明

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n\theta = \frac{r \cos \theta - r^2}{1 - 2r \cos \theta + r^2}, \quad 0 < r < 1$$

《喻超凡，喻超弘 101 電力、電子、電信高考》

《解》 因

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^n = \frac{z}{1-z} \quad (|z| < 1)$$

故令 $z = r e^{i\theta}$ ($0 < r < 1$) 代回上式, 可得

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^{\infty} (r e^{i\theta})^n &= \sum_{n=1}^{\infty} r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta) \\
 &= \frac{r e^{i\theta}}{1 - r e^{i\theta}} \\
 &= \frac{r(\cos \theta + i \sin \theta)}{1 - r(\cos \theta + i \sin \theta)} \\
 &= \frac{r(\cos \theta + i \sin \theta)}{(1 - r \cos \theta) - i r \sin \theta} \\
 &= \frac{r(\cos \theta + i \sin \theta) \{(1 - r \cos \theta) + i r \sin \theta\}}{(1 - r \cos \theta)^2 + r^2 \sin^2 \theta}
 \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n\theta &= \operatorname{Re} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (r e^{i\theta})^n \right\} \\
 &= \operatorname{Re} \left[\frac{r(\cos \theta + i \sin \theta) \{(1 - r \cos \theta) + i r \sin \theta\}}{(1 - r \cos \theta)^2 + r^2 \sin^2 \theta} \right] \\
 &= \frac{r \cos \theta (1 - r \cos \theta) - r^2 \sin^2 \theta}{(1 - r \cos \theta)^2 + r^2 \sin^2 \theta} \\
 &= \frac{r \cos \theta - r^2}{1 - 2r \cos \theta + r^2} \quad (0 < r < 1)
 \end{aligned}$$

4. 解 $(1 + x^2)(dy - dx) = 2xy dx$, 條件為 $y(0) = 1$ 。(10分)

《喻超凡, 喻超弘 101 電力、電子、電信高考》

《解》☞ 原式可改寫成

$$\frac{dy}{dx} - \frac{2x}{1+x^2} y = 1$$

為一階線性 ODE, 積分因子為

$$I = \exp \left\{ \int -\frac{2x}{1+x^2} dx \right\} = \exp \{-\ln |1+x^2|\} = \frac{1}{1+x^2}$$

故

$$Iy(x) = \int \frac{1}{1+x^2} dx = \tan^{-1} x + c$$

即

$$y(x) = (1 + x^2) \tan^{-1} x + c(1 + x^2)$$

再由 $y(0) = 1 = c$, 故

$$y(x) = (1 + x^2) \tan^{-1} x + (1 + x^2)$$

14. 定義函數 $f(t)$ 的傅立葉轉換 (Fourier transform) 爲 $F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iwt} dt$, 其中 $i = \sqrt{-1}$, 求 $f(t) \sin(w_0 t)$ 的傅立葉轉換爲何?

(A) $\frac{i}{2}\{F(w+w_0) - F(w-w_0)\}$ (B) $\frac{1}{2}\{F(w+w_0) - F(w-w_0)\}$

(C) $\frac{1}{2}\{F(w+w_0) + F(w-w_0)\}$ (D) $\frac{i}{2}\{F(w+w_0) + F(w-w_0)\}$

《喻超凡, 喻超弘 101 電力、電子、電信高考》

《解》☞ (A); 因 $\mathcal{F}\{f(t)\} = F(w)$, 故

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{f(t) \sin(w_0 t)\} &= \mathcal{F}\left\{f(t) \frac{1}{2i}(e^{iw_0 t} - e^{-iw_0 t})\right\} \\ &= \frac{1}{2i}\{F(w-w_0) - F(w+w_0)\} \\ &= -\frac{i}{2}\{F(w-w_0) - F(w+w_0)\}\end{aligned}$$

15. 級數 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{10^n} (x-5)^n$ 的收斂半徑 (radius of convergence) 爲何?

(A) $\frac{1}{10}$ (B) $\frac{1}{5}$ (C) $\sqrt{10}$ (D) 10

《喻超凡, 喻超弘 101 電力、電子、電信高考》

《解》☞ (D); 由

$$|x-5| < \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^n}{10^n} \right| = 10$$

故收斂半徑爲 10

《解》因

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k} = 2x \vec{i} + 2y \vec{j} + 2z \vec{k}$$

故曲面在 $(0, 0, 4)$ 處的法向量為

$$\vec{n} = \nabla f(0, 0, 4) = 8\vec{k}$$

因此在點 $(0, 0, 4)$ 處的切平面為

$$8(z - 4) = 0 \quad \text{即} \quad z = 4$$

法線參數式為

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 4 + 8t \end{cases}$$

3. 矩陣 $A = \begin{bmatrix} \cos \theta \times \sin \theta & -\cos \theta & -\sin^2 \theta \\ \cos^2 \theta & \sin \theta & -\cos \theta \times \sin \theta \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}$, 求 :

(1) A 是否為一正交矩陣 (orthogonal matrix) ? 請簡要說明之。(5分)

(2) A 的反矩陣為何? (5分)

(3) $|\det(A)| = ?$ (亦即矩陣 A 的行列式值的絕對值)

《喻超凡, 喻超弘 101 鐵路電力、電子特考》

《解》因

(1) 因

$$(\cos \theta \times \sin \theta)^2 + (\cos^2 \theta)^2 + \sin^2 \theta = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

$$(-\sin^2 \theta)^2 + (-\cos \theta \times \sin \theta)^2 + \cos^2 \theta = \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$\begin{aligned} & (\cos \theta \times \sin \theta)(-\sin^2 \theta) + \cos^2 \theta(-\cos \theta \times \sin \theta) + \sin \theta \times \cos \theta \\ &= -\sin \theta \times \cos \theta + \sin \theta \times \cos \theta = 0 \end{aligned}$$

故 A 矩陣的行向量為一組正規化正交集, 故 A 為正交矩陣。

$$(2) A^{-1} = A^T = \begin{bmatrix} \cos \theta \times \sin \theta & \cos^2 \theta & \sin \theta \\ -\cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin^2 \theta & -\cos \theta \times \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

《解》☞ (A) ;

$$(1, 2, -1) = a(1, 0, 1) + b(0, -1, 2) + c(2, 3, -5)$$

即

$$\begin{cases} a + 2c = 1 \\ -b + 3c = 2 \\ a + 2b - 5c = -1 \end{cases}$$

故 $a = 5$ 、 $b = -8$ 、 $c = -2$ ，即

$$[x]_{B'} = (5, -8, -2)$$

7. $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 2 \\ -6 & 42 & 24 & 54 \\ 24 & -21 & 2 & -13 \end{bmatrix}$ 則 $\text{Rank}(A) = ?$

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 《喻超凡, 喻超弘 101鐵路電力、電子特考》

《解》☞ (B) ;

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 2 \\ -6 & 42 & 24 & 54 \\ 24 & -21 & 2 & -13 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_{12}^{(2)} R_{13}^{(-8)}} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 42 & 28 & 58 \\ 0 & -21 & -14 & -29 \end{bmatrix}$$

$$\text{Rank}(A) = 2$$

8. 有一個矩陣 $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 5 & 10 & 6 \\ 8 & -7 & 5 \end{bmatrix}$ ，請問下面何者正確？

(A) 此矩陣的秩 (rank) 為 3？

(B) $[1 \ 0 \ 0.8]$, $[0 \ 1 \ 0.2]$, $[0 \ 0 \ 1]$ 為矩陣 A 的列空間 (row space) 基底

(C) $[1 \ 0 \ \frac{23}{7}]^T$, $[0 \ 1 \ \frac{2}{7}]^T$, $[0 \ 0 \ 1]^T$ 為矩陣 A 的行空間 (column space) 基底

(D) A 的行列式值 = 0

《喻超凡, 喻超弘 101鐵路電力、電子特考》

《解》☞ (D) ;

$$\det(A) = \frac{1}{10} \begin{vmatrix} 35 & -28 \\ -115 & 92 \end{vmatrix} = 0$$

9. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & -1 \\ -3 & 8 & 9 & 1 \end{bmatrix}$, 則 A 的行列式值 (determinant) 為何 ?

(A) 123 (B) 234 (C) 456 (D) 567

《喻超凡, 喻超弘 101 鐵路電力、電子特考》

《解》☞ (D)

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & -1 \\ -3 & 8 & 9 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 9 & -12 \\ 2 & 6 & -1 \\ 8 & 3 & 10 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 12 & 63 \\ -42 & 63 \end{vmatrix} = 63 \times 9 = 567$$

10. 下列何者不為正交矩陣 (orthogonal matrix) ?

(A) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

《喻超凡, 喻超弘 101 鐵路電力、電子特考》

《解》☞ (D) ; 行向量大小不為 1。

3. 101 年國家安全局情報人員電子組特考

甲、申論題部分 (50 分)

1. (15 分) 請應用留數定理 (Residue Theorem) 計算下列積分

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)} dx$$

《喻超凡, 喻超弘 101 安全局電子組》

《解》 令 $f(z) = \frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+4)}$, 故 $z = \pm i, \pm 2i$ 為 $f(z)$ 的一階極點。但僅有 $z = i, z = 2i$ 在上半平面, 且其殘值為

$$\text{Res}f(i) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{z^2}{2z(z^2+4)} = \frac{i}{2(-1+4)} = \frac{i}{6}$$

$$\text{Res}f(2i) = \lim_{z \rightarrow 2i} \frac{z^2}{(z^2+1)2z} = \frac{2i}{(-4+1)2} = -\frac{i}{3}$$

故

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)} dx &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)} dx \\ &= \frac{1}{2} \times 2\pi i \{ \text{Res}f(i) + \text{Res}f(2i) \} \\ &= \pi i \left(\frac{i}{6} - \frac{i}{3} \right) = \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

2. 設 $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ 為一線性轉換 (linear transformation), 定義如下:

$$\begin{cases} y_1 = ax_1 + 2x_2 \\ y_2 = x_2 + x_3 \\ y_3 = 3x_1 + 5x_2 + ax_3 \end{cases} \quad (\text{其中 } a \text{ 為一常數})$$

(1) 若 T 的反轉換 (inverse transformation) 存在, 則常數 a 之值有何限制? (7 分)

(2) 設 $a = 1$, 求 T 的反轉換。(8 分) 《喻超凡, 喻超弘 101 安全局電子組》

令

$$P = [V_1 \quad V_2] = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

故

$$P^{-1}AP = D = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

(3) ODE 的齊次解爲

$$X_h = \alpha_1 V_1 e^{4t} + \alpha_2 V_2 e^{-t}$$

再令 ODE 的特解爲

$$X_p = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} e^{2t}$$

代回 ODE 中可得

$$2 \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} e^{2t} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} e^{2t} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t}$$

即

$$\begin{cases} a - 2b = 0 \\ 3a + 1 = 0 \end{cases}$$

故 $a = -\frac{1}{3}$ 、 $b = -\frac{1}{6}$ ，則

$$X_p = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} \end{bmatrix} e^{2t}$$

因此 ODE 的通解爲

$$X = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = X_h + X_p = \alpha_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} e^{4t} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-t} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} \end{bmatrix} e^{2t}$$

再由

$$X(0) = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

可解 $\alpha_1 = \frac{1}{10}$ 、 $\alpha_2 = \frac{2}{15}$ ，即

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} e^{4t} + \frac{2}{15} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-t} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} \end{bmatrix} e^{2t}$$

積分因子

$$I = \exp\left\{\int \frac{3}{x} dx\right\} = \exp\{3 \ln |x|\} = x^3$$

故

$$Iy = \int x^3 \frac{1}{x^3} dx = x + c$$

即

$$y(x) = x^{-2} + cx^{-3}$$

由 $y(1) = -1 = 1 + c$, 故 $c = -2$, 即

$$y(x) = x^{-2} - 2x^{-3}$$

6. 令複數 $z = x + iy$, 則方程式 $z^2 + \bar{z}^2 = 2$ 之幾何圖形為何?

(A) 橢圓 (B) 拋物線 (C) 圓形 (D) 雙曲線

《喻超凡, 喻超弘 101 地方特考電力、電子、電信工程》

《解》 (D); 因

$$z^2 + \bar{z}^2 = (z + \bar{z})^2 - 2z\bar{z} = (2x)^2 - 2(x^2 + y^2) = 2x^2 - 2y^2 = 2$$

方程式為 $x^2 - y^2 = 1$, 即幾何圖形為雙曲線。

7. 設複數 $z = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$, 其中 $i = \sqrt{-1}$, 則 z^{40} 之值為何?

(A) 1 (B) $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ (C) $-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$ (D) $\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}$

《喻超凡, 喻超弘 101 地方特考電力、電子、電信工程》

《解》 (B); 因

$$z = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} = e^{\frac{\pi}{6}i}$$

當 $t = 0$ 時 $(x, y) = (0, 0)$ ，且 $t = 2$ 時 $(x, y) = (8, 4)$ ，故

$$\int_C (x^2 + y^2) dx + 2xy dy = \int_{(0,0)}^{(8,4)} d\left(\frac{x^3}{3} + xy^2\right) = \frac{x^3}{3} + xy^2 \Big|_{(x,y)=(0,0)}^{(x,y)=(8,4)} = \frac{896}{3}$$

5. 已知 $Re(z)$ 是 z 的實部 (real part)。當 $z \neq 0$ 時，複變函數 $f(z) = z Re(z)$ 是否可以微分？如果可以微分，求出 $\frac{df(z)}{dz}$ 。(20分)

《喻超凡，喻超弘 101 電機技師》

《解》 令 $z = x + iy$ ，故

$$f(z) = z Re(z) = (x + iy)x = x^2 + ixy = u(x, y) + i v(x, y)$$

即

$$\begin{cases} u(x, y) = x^2 \\ v(x, y) = xy \end{cases}$$

因

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x \neq \frac{\partial v}{\partial y} = x$$

故不滿足 Cauchy - Riemann 方程式，故 $f(z)$ 在 $z \neq 0$ 時不可微分。

再令

$$P = [X_1 \ X_2 \ X_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

故

$$P^{-1}AP = D = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{bmatrix}$$

2. 試計算 $\oint_C \frac{5z+7}{z^2+2z-3} dz$ ，其中曲線 C 之定義為 $|z-2|=2$ 之圓。(10分)

《喻超凡，喻超弘 101 電子技師》

《解》 令 $f(z) = \frac{5z+7}{z^2+2z-3}$ ，則 $f(z)$ 具有 $z=1$ 、 $z=-3$ 的一階 poles，只有 $z=1$ 在 C 內，且

$$\text{Res}f(1) = \left. \frac{5z+7}{2z+2} \right|_{z=1} = \frac{12}{4} = 3$$

故

$$\oint_C \frac{5z+7}{z^2+2z-3} dz = 2\pi i \text{Res}f(1) = 6\pi i$$

3. (1) 試求函數 $f(x) = \begin{cases} -k & , -\pi < x < 0 \\ k & , 0 < x < \pi \end{cases}$ 之傅利葉級數；(10分)

(2) 使用 (1) 之結果試求級數和 $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$ 。(5分)

《喻超凡，喻超弘 101 電子技師》

《解》

(1) 因 $f(x)$ 為奇函數，故令

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

其中

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} k \sin nx dx = \frac{2k}{\pi} \left(-\frac{\cos nx}{n} \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{2k}{\pi} \frac{1 - \cos n\pi}{n}$$

7. 101年調查局調查人員電子科學組特考

1. 考慮一電路，其動態方程式可表為以下之4階常微分方程式

$$\frac{d^4 v}{dt^4} + v = v_s$$

假設初始值為 $v(0) = 1 (V)$, $v'(0) = 0$, $v''(0) = 0$, $v'''(0) = 0$ 。

- (1) 請求 $v(t)$ 之齊次解 (homogeneous solution)。(10分)

- (2) 若 $v_s(t) = e^{-t} \cos t$ ，請以未定係數法 (method of undermined coefficients) 求 $v(t)$ 之特解 (particular solution) 與完整解 (complete solution) (10分)

《喻超凡，喻超弘 101調查局電子科學》

《解》

- (1) 齊次解：令 $v = e^{mt}$ 代回 ODE 中可得

$$m^4 + 1 = 0$$

即

$$m^4 + 2m^2 + 1 - 2m^2 = (m^2 + \sqrt{2}m + 1)(m^2 - \sqrt{2}m + 1) = 0$$

故

$$m = \frac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{2}i}{2} \quad \text{及} \quad m = \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{2}i}{2}$$

則

$$v_h(t) = e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}t} \left(c_1 \cos \frac{\sqrt{2}}{2}t + c_2 \sin \frac{\sqrt{2}}{2}t \right) + e^{\frac{\sqrt{2}}{2}t} \left(c_3 \cos \frac{\sqrt{2}}{2}t + c_4 \sin \frac{\sqrt{2}}{2}t \right)$$

- (2) 令 $v_p(t) = e^{-t}(a \cos t + b \sin t)$ ，故

$$\begin{aligned} \frac{d^4 v_p}{dt^4} &= e^{-t}(a \cos t + b \sin t) + 4(-e^{-t})(-a \sin t + b \cos t) \\ &\quad + 6e^{-t}(-a \cos t - b \sin t) + 4(-e^{-t})(a \sin t - b \cos t) \\ &\quad + e^{-t}(a \cos t + b \sin t) \end{aligned}$$

代回 ODE 中可得

$$\begin{aligned} &e^{-t}(a \cos t + b \sin t) + 4(-e^{-t})(-a \sin t + b \cos t) \\ &+ 6e^{-t}(-a \cos t - b \sin t) + 4(-e^{-t})(a \sin t - b \cos t) \\ &+ e^{-t}(a \cos t + b \sin t) = e^{-t} \cos t \end{aligned}$$

比較係數可得 $\begin{cases} -3a = 1 \\ -3b = 0 \end{cases}$, 故 $a = -\frac{1}{3}$ 、 $b = 0$,

因此 ODE 的特解為 $v_p(t) = -\frac{1}{3}e^{-t} \cos t$, 則 ODE 的通解為

$$\begin{aligned} v(t) &= v_h(t) + v_p(t) \\ &= e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}t} \left(c_1 \cos \frac{\sqrt{2}}{2}t + c_2 \sin \frac{\sqrt{2}}{2}t \right) + e^{\frac{\sqrt{2}}{2}t} \left(c_3 \cos \frac{\sqrt{2}}{2}t + c_4 \sin \frac{\sqrt{2}}{2}t \right) - \frac{1}{3}e^{-t} \cos t \end{aligned}$$

由

$$\begin{cases} v(0) = 1 = c_1 + c_3 - \frac{1}{3} \\ v'(0) = 0 = -\frac{c_1}{\sqrt{2}} + \frac{c_2}{\sqrt{2}} + \frac{c_3}{\sqrt{2}} + \frac{c_4}{\sqrt{2}} + \frac{1}{3} \\ v''(0) = 0 = -c_2 + c_4 \\ v'''(0) = 0 = \frac{c_1}{\sqrt{2}} + \frac{c_2}{\sqrt{2}} - \frac{c_3}{\sqrt{2}} + \frac{c_4}{\sqrt{2}} - \frac{2}{3} \end{cases}$$

可解得 $c_1 = \frac{1}{12}(8 + 3\sqrt{2})$ 、 $c_2 = \frac{1}{6\sqrt{2}}$ 、 $c_3 = \frac{2}{3} - \frac{1}{2\sqrt{2}}$ 、 $c_4 = \frac{1}{6\sqrt{2}}$,
把 c_1 、 c_2 、 c_3 、 c_4 代回 $v(t)$ 中即為全解。

2. 考慮圖一之電路, 其動態方程式可表為以下之常微分方程

$$\begin{cases} R_1 R_2 C_1 \dot{v}_{C_1} + (R_1 + R_2)v_{C_1} - R_1 v_{C_2} = R_2 v_s \\ R_2 C_2 \dot{v}_{C_2} + v_{C_2} - v_{C_1} = 0 \end{cases}$$

其中之微分為對時間 t 之微分。上式也可表為矩陣型式, 即

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_{C_1} \\ \dot{v}_{C_2} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} v_{C_1} \\ v_{C_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1 C_1} \\ 0 \end{bmatrix} v_s \quad \text{其中} \quad A = \begin{bmatrix} \frac{-(R_1 + R_2)}{R_1 R_2 C_1} & \frac{1}{R_2 C_1} \\ \frac{1}{R_2 C_2} & \frac{-1}{R_2 C_2} \end{bmatrix}$$

假設各電子元件值為

$$R_1 = 1\Omega, R_2 = 4\Omega, C_1 = \frac{1}{4}F, C_2 = \frac{1}{12}F$$

- (1) 請求矩陣 A 之特徵值與特徵向量, 並說明此問題中特徵值之物理意義。(10分)
- (2) 假設初始電容電壓為 $v_{C_1}(0) = 1(V)$, $v_{C_2}(0) = 0(V)$, 且輸入電源為 $v_s(t) = 3 \sin 2t$, 請以拉氏轉換 (Laplace transform) 求 $v_{C_2}(t)$ 。(15分)

《喻超凡, 喻超弘 101 調查局電子科學》