106-108年公職技師

工程數學試題詳解

喻超凡　喻超弘編著

喻超凡數位企業有限公司

版權所有　　翻印必究

目錄

嚴禁複製 翻印必究

嚴禁重製
翻印必究

Part I

106年歷試詳解

翻印必究
嚴禁重製

1. 106年公務人員電力、電子、電信、醫學工程三級高考

注意：禁止使用電子計算器。

甲、申論題部分 (50分)

不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在申論試卷上，於本試題上作答者，不予計分。請以藍、黑色鋼筆或原子筆在申論試卷上作答。

1. 計算 $Ax = b$ 最小平方問題 (least square problem) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ 的解。
(10%) 《喻超凡, 喻超弘 106電力、電子、電信、醫工高考》

《解》☞ $x = (A^TA)^{-1}A^Tb = \dfrac{1}{14}\begin{bmatrix} 18 \\ -6 \end{bmatrix}$

2. 矩陣 $M = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$：
(1) 求 M 之特徵值 (eigenvalue)。(5分)
(2) 求矩陣 P 以滿足 $P^{-1}1MP$ 爲對角矩陣 (diagonal matrix)。(5分)
(3) 求 M^4。(5分) 《喻超凡, 喻超弘 106電力、電子、電信、醫工高考》

《解》☞

(1) 由

$$\det(M - \lambda I) = (-1)^3(\lambda^3 - 3\lambda^2 - 4\lambda + 12) = -(\lambda - 2)(\lambda + 2)(\lambda - 3) = 0$$

可得特徵值爲 $\lambda = -2$、2、3。

嚴禁翻印 重製必究

(2) 將 $\lambda = -2$ 代回 $(M - \lambda I)X = 0$ 中可得

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & 5 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

故可得對應的特徵向量爲

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

將 $\lambda = 2$ 代回 $(M - \lambda I)X = 0$ 中可得

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

故可得對應的特徵向量爲

$$X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

將 $\lambda = 3$ 代回 $(M - \lambda I)X = 0$ 中可得

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

故可得對應的特徵向量爲

$$X_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

令

$$P = [X_1 \quad X_2 \quad X_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

則

$$P^{-1}MP = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

(3) 由 Cayley–Hamilton 定理可知

$$M^3 - 3M^2 - 4M + 12I = 0$$

嚴禁翻印 重製必究

故

$$
\begin{aligned}
M^4 &= (M+3I)(M^3-3M^2-4M+12I)+13M^2-36I \\
&= 13M^2-36I \\
&= \begin{bmatrix} 3 & -65 & -13 \\ 13 & 81 & 13 \\ 13 & 65 & 29 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

3. 設微分方程式 $y''+ay'+by=-65\sin 2t$，$y(0)=y_0$，$y'(0)=y_0'$ 的解 $y(t)$ 的拉普拉斯轉換爲

$$Y(s)=\frac{13s^3+45s^2+52s+50}{s^4+4s^3+7s^2+16s+12}$$

(1) 求常數 a、b、y_0 及 y_0 之値。(8分)

(2) 求微分方程式的解 $y(t)$。(7分)

《**喻超凡，喻超弘** 106電力、電子、電信、醫工高考》

《解》 ☞

(a) 對 ODE 兩端取 L-T，可得

$$s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)+a\{sY(s)-y(0)\}+bY(s)=-\frac{130}{s^2+4}$$

其中 $\mathscr{L}\{y(t)\}=Y(s)$，整理可得

$$(s^2+as+b)Y(s)=sy_0+ay_0+y_0'-\frac{130}{s^2+4} \tag{1}$$

又

$$Y(s)=\frac{13s^3+45s^2+52s+50}{s^4+4s^3+7s^2+16s+12}=\frac{13s^3+45s^2+52s+50}{(s^2+4s+3)(s^2+4)}$$

故

$$(s^2+4s+3)Y(s)=\frac{13s^3+45s^2+52s+50}{(s^2+4)}=13s+45-\frac{130}{s^2+4} \tag{2}$$

(1) 式、(2) 式比較可得 $a=4$、$b=3$、$y_0=13$，$y_0'=-7$。

(b) 又

$$Y(s)=\frac{13s^3+45s^2+52s+50}{(s^2+4s+3)(s^2+4)}=\frac{3}{s+1}+\frac{2}{s+3}+\frac{2(4s+1)}{s^2+4}$$

嚴禁翻印重製必究

嚴禁翻印 重製必究

故

$$y(t) = \mathscr{L}^{-1}\{Y(s)\} = 3e^{-t} + 2e^{-3t} + 8\cos 2t + \sin 2t$$

4. (10分) 每一次白努利試驗 (Bernoulli trials) 中，成功之機率爲 p，失敗之機率爲 $q = 1 - p$，則代表在 n 次獨立試驗中成功次數的二項式隨機變數 x，其機率分布 $F(x) = C^n_x p^x q^{n-x},\ x = 0, 1, 2, 3, \cdots, n$。若 $F(x)$ 在 $x = x_0$ 處有極大值，x_0 之值爲何？ **《喻超凡, 喻超弘** 106電力、電子、電信、醫工高考》

《解》 ☞ 由

$$\begin{aligned}
\frac{F(x_0)}{F(x_0+1)} &= \frac{C^n_{x_0} p^{x_0}(1-p)^{n-x_0}}{C^n_{x_0+1} p^{x_0+1}(1-p)^{n-x_0-1}} \\
&= \frac{\dfrac{n!}{x_0!(n-x_0)!} p^{x_0}(1-p)^{n-x_0}}{\dfrac{n!}{(x_0+1)!(n-x_0-1)!} p^{x_0+1}(1-p)^{n-x_0-1}} \\
&= \frac{(x_0+1)(1-p)}{(n-x_0)p} \geq 1
\end{aligned}$$

可得

$$x_0 \geq (n+1)p - 1 \tag{1}$$

同理由 $\dfrac{F(x_0)}{F(x_0-1)} \geq 1$，可得

$$x_0 \leq (n+1)p \tag{2}$$

由 (1) 式、(2) 式可知

$$(n+1)p - 1 \leq x_0 \leq (n+1)p$$

當 $(n+1)p$ 不爲整數時，則 $x_0 = [(n+1)p]$，其中 $[\ \cdot\ ]$ 爲最大整數函數。當 $(n+1)p$ 爲整數時，則 $x_0 = (n+1)p$ 及 $x_0 = (n+1)p - 1$。

乙、測驗題部分 (50分)

本測驗試題爲單一選擇題，請選出一個正確或最適當的答案，複選作答者，該題不予計分。共20題，每題2.5分，須用2B鉛筆在試卡上依題號清楚劃記，於本試題或申論試卷上作答者，不予計分。

1. 試求由三點 $P_1(2,2,0)$, $P_2(-1,0,2)$, $P_3(0,4,3)$ 所決定之三角形的面積:
   (A) 6.5　(B)7　(C)7.5　(D) 8

《喻超凡, 喻超弘 106電力、電子、電信、醫工高考》

《解》☞ 因 $\overrightarrow{P_1P_2}=(-3,-2,2)$、$\overrightarrow{P_1P_3}=(-2,2,3)$，故三角形的面積爲

$$A=\frac{1}{2}|\overrightarrow{P_1P_2}\times\overrightarrow{P_1P_3}|=\frac{1}{2}|(-10,5,-10)|=\frac{15}{2}$$

選 (C)

2. 下列集合中之向量, 何者爲線性獨立 (linearly independent)？
   (A) $\{(3,1,-4),(2,0,-1),(3,-1,1)\}$　(B) $\{(1,2,0),(-1,1,2),(3,1,5),(0,1,-1)\}$
   (C) $\{(1,1,-2),(0,1,0),(2,1,-1)\}$　(D) $\{(3,1,0),(2,-1,1),(1,0,1),(2,1,-1)\}$

《喻超凡, 喻超弘 106電力、電子、電信、醫工高考》

《解》☞ 選 (C)

(A) 因

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -4) \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}=0$$

故集合爲線性相依。

(B) 三維空間中, 4個向量的集合, 必爲線性相依。

(C) 因

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1) \end{vmatrix}=3\neq 0$$

嚴禁翻印 重製必究

故集合爲線性獨立。

(D) 三維空間中, 4個向量的集合, 必爲線性相依。

嚴禁翻印

3. 一階微分方程式 $x^2y' - xy - y^2 = 0$ 之解爲:(其中 C 爲常數。)
(A) $y = -\ln|x| + C$ (B) $y = \dfrac{x}{-\ln|x| + C}$ (C) $y = \dfrac{-\ln|x| + C}{x}$
(D) $-\ln|x|x + C$ 《喻超凡, 喻超弘 106電力、電子、電信、醫工高考》

《解》☞ 原式可改寫成

$$y^{-2}y' - \frac{1}{x}y^{-1} = \frac{1}{x^2}$$

令 $u = y^{-1}$, 故 $\dfrac{du}{dx} = -y^{-2}y'$, 代回上式可得

$$\frac{du}{dx} + \frac{1}{x}u = -\frac{1}{x^2}$$

上式爲一階線性 ODE, 積分因子爲

$$I = \exp\{\int \frac{1}{x}\, dx\} = \exp\{\ln|x|\} = x$$

故

$$Iu = \int x(-\frac{1}{x^2})\, dx = -\ln|x| + C$$

即

$$y^{-1} = \frac{-\ln|x| + C}{x} \Rightarrow y = \frac{x}{-\ln|x| + C}$$

選 (B)

重製必究

4. 設 x、y、z 爲任意實數, 下列選項何者恆爲正確?
(A) $x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 4xy + 2xz \geq 0$
(B) $x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 4xy + 4yz \geq 0$
(C) $x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 4xy + 4xz + 4yz \geq 0$
(D) $x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy + 2xz + 2yz \geq 0$
《喻超凡, 喻超弘 106電力、電子、電信、醫工高考》