

103-105 年公職技師

工程數學試題詳解

喻超凡 喻超弘編著



喻超凡數位企業有限公司

版權所有 翻印必究

嚴 翻

目錄

I	103年歷試詳解	1
1.	103年公務人員電力、電子、電信、醫學工程三級高考	3
2.	103年鐵路人員電力、電子工程三級特考	17
3.	103年國家安全局情報人員電子組特考	30
4.	103年地方政府電力、電子三等考試	42
5.	103年電機技師高等考試	54
6.	103年電子技師高等考試	59
7.	103年調查局調查人員電子科學組特考	63
8.	103年三等消防警察人員考試	68
9.	103年公務人員氣象三級高考	73
II	104年歷試詳解	79
1.	104年公務人員電力、電子、醫學工程三級高考	81
2.	104年鐵路人員電力、電子工程三級特考	95
3.	104年國家安全局情報人員電子組特考	109
4.	104年地方政府電力、電子、電信三等考試	120
5.	104年電機技師高等考試	132
6.	104年電子技師高等考試	137
7.	104年調查局調查人員電子科學組特考	140
8.	104年三等消防警察人員考試	147
9.	104年公務人員身障電力三級高考	151
III	105年歷試詳解	165
1.	105年公務人員電力、電子、電信、醫學工程三級高考	167
2.	105年鐵路人員電力、電子工程三級特考	178
3.	105年國家安全局情報人員電子組特考	190
4.	105年地方政府電力、電子、電信三等考試	203
5.	105年電機技師高等考試	218
6.	105年電子技師高等考試	223
7.	105年調查局調查人員電子科學組特考	228
8.	105年三等消防警察人員考試	231
9.	105年公務人員身障電力三級高考	236

嚴 翻

禁 印

Part I

103年歷試詳解

重 必

製 究

翻

印

必

究

嚴

禁

重

製

1. 103年公務人員電力、電子、電信、醫學工程 高考

甲、申論題部分 (50分)

1. 請用拉普拉斯轉換法解微分方程式 (15%)

$$\frac{dy}{dt} - 6y + 9 \int_0^t y(\tau) d\tau = 4t^3 e^{3t}, \quad y(0) = 0$$

《喻超凡, 喻超弘 103 電力、電子、電信、醫工高考》

《解》☞ 對方式兩端取 L-T, 可得

$$sY(s) - y(0) - 6Y(s) + 9 \frac{1}{s} Y(s) = 4 \times \frac{3!}{(s-3)^4}$$

其中 $\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s)$, 整理可得

$$\frac{s^2 - 6s + 9}{s} Y(s) = \frac{4!}{(s-3)^4}$$

即

$$Y(s) = \frac{4! \times s}{(s-3)^6}$$

故

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4! \times s}{(s-3)^6}\right\} \\ &= \frac{d}{dt} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4!}{(s-3)^6}\right\} = \frac{d}{dt} \left\{4! e^{3t} \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^6}\right)\right\} \\ &= \frac{d}{dt} \left\{\frac{4! t^5 e^{3t}}{5!}\right\} = t^4 e^{3t} + \frac{3}{5} t^5 e^{3t} \end{aligned}$$

2. 令 $A = \begin{bmatrix} 1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ \lambda_2 & 1 + \lambda_2 a_2 & \lambda_2 a_3 & \cdots & \lambda_2 a_n \\ \lambda_3 & \lambda_3 a_2 & 1 + \lambda_3 a_3 & \cdots & \lambda_3 a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_{n-1} & \lambda_{n-1} a_2 & \lambda_{n-1} a_3 & \cdots & \lambda_{n-1} a_n \\ \lambda_n & \lambda_n a_2 & \lambda_n a_3 & \cdots & 1 + \lambda_n a_n \end{bmatrix}$, 求解 A 的反矩陣 (inverse matrix)。(10分)

《喻超凡, 喻超弘 103 電力、電子、電信、醫工高考》

《解》 $\Rightarrow [A|I] = \left[\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda_2 & 1 + \lambda_2 a_2 & \lambda_2 a_3 & \cdots & \lambda_2 a_n & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda_3 & \lambda_3 a_2 & 1 + \lambda_3 a_3 & \cdots & \lambda_3 a_n & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_{n-1} & \lambda_{n-1} a_2 & \lambda_{n-1} a_3 & \cdots & \lambda_{n-1} a_n & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \lambda_n & \lambda_n a_2 & \lambda_n a_3 & \cdots & 1 + \lambda_n a_n & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array} \right]$

$\xrightarrow{R_{12}^{(-\lambda_2)} R_{13}^{(-\lambda_3)} \cdots R_{1n}^{(-\lambda_n)}} \left[\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -\lambda_2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & -\lambda_3 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\lambda_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -\lambda_n & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array} \right]$

$\xrightarrow{R_{21}^{(-a_2)} R_{31}^{(-a_3)} \cdots R_{n1}^{(-a_n)}} \left[\begin{array}{ccccc|cccccc} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 + \cdots + \lambda_n a_n & -a_2 & -a_3 & -a_4 & \cdots & -a_n \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -\lambda_2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & -\lambda_3 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\lambda_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -\lambda_n & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array} \right]$

故

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 + \cdots + \lambda_n a_n & -a_2 & -a_3 & -a_4 & \cdots & -a_n \\ & -\lambda_2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & -\lambda_3 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & -\lambda_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ & -\lambda_n & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

3. 試找由一平面 $Ax + By + Cz = D$, $D \neq 0$ 上距離原點 $(0, 0, 0)$ 最近一點之座標。
(10分) **《喻超凡, 喻超弘 103 電力、電子、電信、醫工高考》**

《解》☞ 平面 $E : Ax + By + Cz = D$ 的法向量為

$$\vec{n} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}$$

令原點 $O(0, 0, 0)$ 到平面最近的點為 $P(x, y, z)$, 則

$$\vec{OP} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

且 $\vec{OP} \parallel \vec{n}$, 故

$$x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = m(A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k})$$

則

$$\begin{cases} x = mA \\ y = mB \\ z = mC \end{cases}$$

代回平面方程式可得

$$A^2 m + B^2 m + C^2 m = D$$

由上式可解得

$$m = \frac{D}{A^2 + B^2 + C^2}$$

即原點到平面最近點的座標為

$$x = mA = \frac{DA}{A^2 + B^2 + C^2}, \quad y = mB = \frac{DB}{A^2 + B^2 + C^2}$$

$$z = mC = \frac{DC}{A^2 + B^2 + C^2}$$

4. 投擲十顆公平的骰子，其中五顆為藍色骰子而另五顆為綠色骰子，試求下列事件之機率：

- (1) 剛好二顆藍色骰子皆為6點且剛好三顆綠色骰子皆為偶數點數。(7分)
 (2) 藍色骰子出現6點之數量同於綠色骰子出現6點之數量。(8分)

《喻超凡, 喻超弘 103 電力、電子、電信、醫工高考》

《解》

(1) 藍色骰子剛好二顆骰子皆為6點的機率為 $C_2^5 \times (\frac{1}{6})^2 \times (\frac{5}{6})^3$

綠色骰子剛好三顆骰子皆為偶數點數的機率為 $C_3^5 \times (\frac{1}{2})^3 \times (\frac{1}{2})^2$

剛好二顆藍色骰子皆為6點且剛好三顆綠色骰子皆為偶數點數的機率為

$$\{C_2^5 \times (\frac{1}{6})^2 \times (\frac{5}{6})^3\} \times \{C_3^5 \times (\frac{1}{2})^3 \times (\frac{1}{2})^2\} = 0.0502347$$

(2) 0顆藍色及綠色骰子出現6點之機率為 $\{C_0^5 \times (\frac{5}{6})^5\}^2$

1顆藍色及綠色骰子出現6點之機率為 $\{C_1^5 \times (\frac{1}{6}) \times (\frac{5}{6})^4\}^2$

2顆藍色及綠色骰子出現6點之機率為 $\{C_2^5 \times (\frac{1}{6})^2 \times (\frac{5}{6})^3\}^2$

3顆藍色及綠色骰子出現6點之機率為 $\{C_3^5 \times (\frac{1}{6})^3 \times (\frac{5}{6})^2\}^2$

4顆藍色及綠色骰子出現6點之機率為 $\{C_4^5 \times (\frac{1}{6})^4 \times (\frac{5}{6})\}^2$

5顆藍色及綠色骰子出現6點之機率為 $\{C_5^5 \times (\frac{1}{6})^5\}^2$

故藍色骰子出現6點之數量同於綠色骰子出現6點之數量的機率為

$$\begin{aligned} & \{C_0^5 \times (\frac{5}{6})^5\}^2 + \{C_1^5 \times (\frac{1}{6}) \times (\frac{5}{6})^4\}^2 + \{C_2^5 \times (\frac{1}{6})^2 \times (\frac{5}{6})^3\}^2 \\ & + \{C_3^5 \times (\frac{1}{6})^3 \times (\frac{5}{6})^2\}^2 + \{C_4^5 \times (\frac{1}{6})^4 \times (\frac{5}{6})\}^2 + \{C_5^5 \times (\frac{1}{6})^5\}^2 = 0.349896 \end{aligned}$$

乙、測驗題部分 (50分)

1. 定義曲線 C 為 $x = t$, $y = t$ 及 $z = t^2$, 其中 $0 \leq t \leq 2$, 求函數 $\psi(x, y) = x + y$ 沿著曲線 C 之線積分。

- (A) 8 (B) $32/3$ (C) $8\sqrt{2}$ (D) $26\sqrt{2}/3$

《喻超凡, 喻超凡 103 電力、電子、電信、醫工高考》

《解》 (D); 因 $C: x = t, y = t$ 及 $z = t^2$, 其中 $0 \leq t \leq 2$, 故

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt = \sqrt{1 + 1 + (2t)^2} dt = \sqrt{2 + 4t^2} dt$$

則

$$\begin{aligned} \int_C \psi(x, y) ds &= \int_C (x + y) ds = \int_{t=0}^{t=2} (t + t) \sqrt{2 + 4t^2} dt \\ &= \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} \times (2 + 4t^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_{t=0}^2 = \frac{1}{6} \times \{(18)^{\frac{3}{2}} - (2)^{\frac{3}{2}}\} \\ &= \frac{1}{6} \{54\sqrt{2} - 2\sqrt{2}\} = \frac{26\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

2. 設 f 和 g 可微分 (differentiable) 純量函數, \vec{v} 和 \vec{u} 為可微分向量函數, 則有關它們的梯度 (gradient), 散度 (divergence) 與拉普拉斯算子 (Laplace operator) 的等式, 下列何者錯誤?

- (A) $\text{div}(f\vec{v}) = f \text{div}(\vec{v}) + \vec{v} \cdot \nabla f$
 (B) $\text{div}(f\nabla g) = f\nabla^2 g + \nabla f \cdot \nabla g$
 (C) $\nabla^2 f = \text{div}(\nabla f)$
 (D) $\nabla^2(fg) = g\nabla^2 f + f\nabla^2 g$

《喻超凡, 喻超凡 103 電力、電子、電信、醫工高考》

《解》 (D); 因

$$\nabla^2(fg) = \nabla \cdot \nabla(fg)$$

$$\begin{aligned}
 &= \nabla \cdot (f\nabla g + g\nabla f) \\
 &= f\nabla \cdot \nabla g + 2\nabla f \cdot \nabla g + g\nabla \cdot \nabla f \\
 &= f\nabla^2 g + 2\nabla f \cdot \nabla g + g\nabla^2 f
 \end{aligned}$$

3. 令向量函數 $\vec{F} = [y^2, z, x^2]$, 曲線 C 為螺旋圓弧線 $\vec{r} = [2\cos t, 2\sin t, t]$ 從 $(2, 0, 0)$ 到 $(-2, 0, \pi)$, 則線積分 $\int_C \vec{F}(\vec{r}) dt$ 之值為何?

(A) $[\pi, \frac{1}{2}\pi^2, \pi]$ (B) $[\pi, \pi^2, \pi]$ (C) $[2\pi, \frac{1}{2}\pi^2, 2\pi]$

(D) $[2\pi, \pi^2, 2\pi]$

《喻超凡, 喻超弘 103 電力、電子、電信、醫工高考》

《解》 (C); C 的位置向量為

故

$$\vec{r} = [2\cos t, 2\sin t, t]$$

$$\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t \\ z = t \end{cases}$$

故點 $(2, 0, 0)$ 為 $t = 0$, 點 $(-2, 0, \pi)$ 為 $t = \pi$, 則

$$\begin{aligned}
 \int_C \vec{F}(\vec{r}) dt &= \int_C [y^2, z, x^2] dt \\
 &= \int_0^\pi [(4\sin^2 t), t, (4\cos^2 t)] dt \\
 &= \int_0^\pi [2(1 - \cos 2t), t, 2(1 + \cos 2t)] dt \\
 &= [(2t - \sin 2t), \frac{t^2}{2}, (2t + \sin 2t)] \Big|_0^\pi \\
 &= [2\pi, \frac{\pi^2}{2}, 2\pi]
 \end{aligned}$$