翻轉微積分

上冊

勘誤檔案

喻超凡喻超弘編

喻超凡翻轉教室

微積分fb社團

微積分 fb 社團

《解》☞ 令 $f(x_1)=\sin\sqrt{x_1}$，$x_1\in[\,x\,,\,4+x\,]$，$x>0$，故

$$f'(x_1)=\frac{1}{2\sqrt{x_1}}\cos\sqrt{x_1}\quad,\quad x_1\in(x\,,\,4+x)$$

由微分均值定理可知，$\exists\, p\in(x\,,\,4+x)$，使得

$$f'(p)=\frac{f(4+x)-f(x)}{4+x-x}=\frac{\sin(\sqrt{4+x}\,)-\sin(\sqrt{x}\,)}{4}$$

又 $f'(p)=\dfrac{1}{2\sqrt{p}}\cos\sqrt{p}$，代入上式可得

$$\frac{1}{2\sqrt{p}}\cos\sqrt{p}=\frac{\sin(\sqrt{4+x}\,)-\sin(\sqrt{x}\,)}{4}$$

即

$$\sin(\sqrt{4+x}\,)-\sin(\sqrt{x}\,)=\frac{4}{2\sqrt{p}}\cos\sqrt{p}=\frac{2}{\sqrt{p}}\cos\sqrt{p}$$

因 $p\in(x\,,\,4+x)$, 故 $x<p<4+x$，或

$$\frac{1}{\sqrt{x}}>\frac{1}{\sqrt{p}}>\frac{1}{\sqrt{4+x}}$$

故

$$\frac{2}{\sqrt{4+x}}|\cos\sqrt{p}|<\frac{2}{\sqrt{p}}|\cos\sqrt{p}|<\frac{2}{\sqrt{x}}|\cos\sqrt{p}|$$

又

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{4+x}}|\cos\sqrt{p}|=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{x}}|\cos\sqrt{p}|=0$$

故由夾擠定理可知 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{p}}|\cos\sqrt{p}|=0$，即 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{p}}\cos\sqrt{p}=0$，則

$$\lim_{x\to\infty}\{\sin(\sqrt{4+x}\,)-\sin(\sqrt{x}\,)\}=0$$

7. 設 $g(x)$ 在開區間 $(-3\,,\,5)$ 中連續，$g'(-1)=0$，當 $x\in(-3,-1)\cup(-1\,,\,5)$ 時，$g'(x)$ 存在且 $g'(x)\neq0$，又設 $g(-1)=8$，且當 $x\in(-2\,,\,0)$ 時，$g(x)\le8$，試問對任何 $x\in(-3\,,\,5)$，$g(x)\le8$ 是否皆成立？並證明你的回答。 《台大》

《提示》➡ 反證法

(3) 斜漸近線 (slant asymptotes): 設函數圖形具有 $y = mx + k$ 的斜漸近線

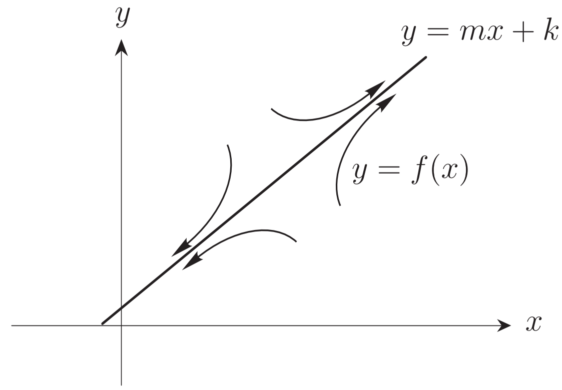


Figure 2.8: 斜漸近線

(a) 若函數爲 $y = f(x)$，則滿足

$$\lim_{x \to \pm\infty} \{f(x) - (mx + k)\} = 0$$

故可得斜率：$m = \displaystyle\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$；截距：$k = \displaystyle\lim_{x \to \pm\infty} \{f(x) - mx\}$。

(b) 若函數的參數式爲 $\begin{cases} x = g(t) \\ y = h(t) \end{cases}$，則滿足

$$\lim_{t \to t_0} x = \lim_{t \to t_0} g(t) = \pm\infty \quad 且 \quad \lim_{t \to t_0} y = \lim_{t \to t_0} h(t) = \pm\infty$$

可得斜率 $m = \displaystyle\lim_{t \to t_0} \frac{y}{x} = \lim_{t \to t_0} \frac{h(t)}{g(t)}$

截距 $k = \displaystyle\lim_{t \to t_0} (y - m\,x) = \lim_{t \to t_0} \{h(t) - m\,g(t)\}$。

(c) 常見函數的斜漸近線

(i) 若函數爲 $y = f(x)$，其中 $f(x)$ 爲分式或冪次函數，而且 $\deg\{f(x)\} = 1$，則函數 **可能** 具有斜漸近線 $y = mx + k$。例如：

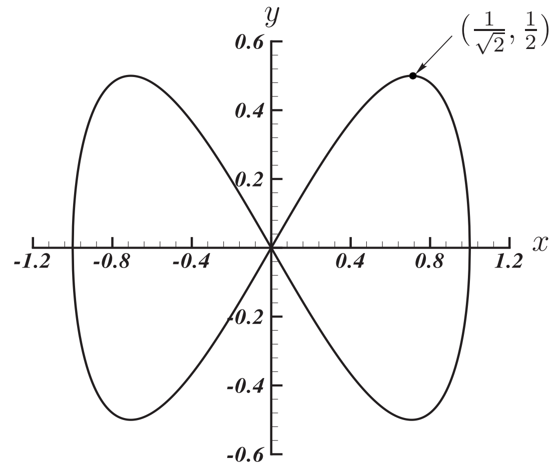
$$y = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}$$

$$y = \sqrt[3]{x^3 + x^2 + 3} + \sqrt{x^2 + 1}$$

(ii) 若隱函數 (方程式) 爲 $F(x, y) = c$，而且 y 與 x 的最高次冪相同，則隱函數 $F(x, y) = c$ **可能** 具有斜漸近線 $y = mx + k$。例如：

$$x^3 + x^2 + x + y^3 = 1$$

(4) $y^2 = x^2(1-x^2)$ 的圖形：



22. 求曲線 $x = t^2$、$y = 3t + t^7$ 的 反曲點 (inflection point)。

《解》 ☞ 因 $x = t^2$、$y = 3t + t^7$，故

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3+7t^6}{2t}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{d}{dt}\left(\frac{3+7t^6}{2t}\right) \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dt}} \\ &= \frac{42t^5 \cdot 2t - 2(3+7t^6)}{(2t)^2} \cdot \frac{1}{2t} = \frac{70t^6 - 6}{(2t)^3}\end{aligned}$$

令 $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$，可得 $70t^6 - 6 = 0$，故 $t = \boxed{\pm}\sqrt[6]{\frac{3}{35}}$，則

$$x = t^2 = \sqrt[3]{\frac{3}{35}} \quad , \quad y = 3t + t^7 = \boxed{\pm}(3\sqrt[6]{\frac{3}{35}} + (\sqrt[6]{\frac{3}{35}})^7)$$

(1) 當 $t > \sqrt[6]{\frac{3}{35}}$ 時，$\frac{d^2y}{dx^2} > 0$，當 $t < \sqrt[6]{\frac{3}{35}}$ 時，$\frac{d^2y}{dx^2} < 0$

(2) 當 $t > -\sqrt[6]{\frac{3}{35}}$ 時，$\frac{d^2y}{dx^2} > 0$，當 $t < -\sqrt[6]{\frac{3}{35}}$ 時，$\frac{d^2y}{dx^2} < 0$

(3) 故曲線的反曲點為 $(\sqrt[3]{\frac{3}{35}}, 3\sqrt[6]{\frac{3}{35}}+(\sqrt[6]{\frac{3}{35}})^7)$、$(\sqrt[3]{\frac{3}{35}}, -(3\sqrt[6]{\frac{3}{35}}+(\sqrt[6]{\frac{3}{35}})^7))$

23. 證明擺線 (cycloid) $\begin{cases} x = a(t-\sin t) \\ y = a(1-\cos t) \end{cases}$ 常數 $a>0$，恆凹向下 (concave downward)。

《成大》

《証》 ☞ 因 $x = a(t-\sin t)$、$y = a(1-\cos t)$，故

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{a\sin t}{a(1-\cos t)} = \frac{\sin t}{1-\cos t}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\sin t}{1-\cos t}\right)\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}} \\
&= \frac{\cos t(1-\cos t)-\sin t\cdot\sin t}{(1-\cos t)^2}\cdot\frac{1}{a(1-\cos t)} \\
&= \frac{\cos t-\cos^2 t-\sin^2 t}{a(1-\cos t)^2} \\
&= \frac{-(1-\cos t)}{a(1-\cos t)^3} = \frac{-1}{a(1-\cos t)^2} < 0 \quad (\because a>0)
\end{aligned}$$

故知此擺線恆凹性向下

(a)

$$\begin{aligned}\int \sinh^{-1} x \ dx &= x\sinh^{-1} x - \int x\, d(\sinh^{-1} x) \\ &= x\sinh^{-1} x - \int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\, dx \\ &= x\sinh^{-1} x - \frac{1}{2}\int (x^2+1)^{-\frac{1}{2}}\, d(1+x^2) \\ &= x\sinh^{-1} x - \sqrt{x^2+1} + c\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\int \tanh^{-1} x\, dx &= x\tanh^{-1} x - \int x\, d(\tanh^{-1} x) \\ &= x\tanh^{-1} x - \int \frac{x}{1-x^2}\, dx \\ &= x\tanh^{-1} x + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1-x^2}\, d(1-x^2) \\ &= x\tanh^{-1} x + \frac{1}{2}\ln|1-x^2| + c\end{aligned}$$

4. 求 $\int x \ \sin^2 x \ dx$ 之值。

《解》 ☞

$$\begin{aligned}\int x \ \sin^2 x \ dx &= \frac{1}{2}\int x(1-\cos 2x) \ dx \\ &= \frac{1}{2}\int x \ dx - \frac{1}{2}\int x \ \cos 2x \ dx \\ &= \frac{1}{2}\cdot \boxed{\frac{x^2}{2}} - \frac{1}{2}\int x \ d(\frac{\sin 2x}{2}) \\ &= \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\{x\cdot\frac{\sin 2x}{2} - + \int \frac{1}{2}\sin 2x \ dx \\ &= \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x \ \sin 2x - \frac{1}{8}\cos 2x + c\end{aligned}$$

5. 求 $\int x^2 e^x \cos x \ dx$ 之值。