

翻轉微積分上冊

勘誤檔案

喻超凡 喻超弘編著



喻超凡數位企業有限公司

版權所有 翻印必究

《解》☞

(1) $x > 1$ 時 $f(x) = x\left[\frac{1}{x}\right] = 0$ 。

(2) $0 < x \leq 1$ 時, 設 $\left[\frac{1}{x}\right] = n \in \mathbb{N}$, 故

$$n \leq \frac{1}{x} < (n+1) \Rightarrow \frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n}$$

因此 $f(x) = x\left[\frac{1}{x}\right] = xn$; $\frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ 。

(3) 由 (1)、(2) 可知

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ; x > 1 \\ nx & ; \frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

故 $f(x)$ 在 $x = \frac{1}{n}$ 時為分段點, 現在討論 $x = \frac{1}{n}$ 時 $f(x)$ 的連續性, 因

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{1}{n})^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (\frac{1}{n})^+} x\left[\frac{1}{x}\right] = \lim_{x \rightarrow (\frac{1}{n})^+} x(n-1) = \frac{n-1}{n}; (\forall n \in \mathbb{N})$$

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{1}{n})^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (\frac{1}{n})^-} x\left[\frac{1}{x}\right] = \lim_{x \rightarrow (\frac{1}{n})^-} xn = 1; (\forall n \in \mathbb{N})$$

因 $\lim_{x \rightarrow (\frac{1}{n})^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow (\frac{1}{n})^-} f(x)$, 故 $\lim_{x \rightarrow (\frac{1}{n})} f(x)$ 不存在。

即 $f(x)$ 在 $x = \frac{1}{n}$ 處不連續。

(4) 結論: $f(x)$ 在 $(0, \infty) \setminus \{\frac{1}{n} \mid \forall n \in \mathbb{N}\}$ 處連續。