序

數學是所有科學之母, 洩漏天機的語言，微積分這一門學問, 它是僅次於歐氏幾何為數學上最偉大的成就之一, 也是近代所有理工商等學門的基礎學科，因此是研讀理工商的同學必修的一門課程，但是因為它的理論艱澀繁瑣, 枯燥難學，所以是很多莘莘學子在學習上的一大夢魘。因此喻超凡老師秉著服務同學的初衷，參考國內外著名之微積分叢書，以及在國立大學及全國各大補習班任教的教學心得，提綱挈領的將重點及觀念，以結構化的方式放在每一章節的開始，並於每一章節的精選範例中，加入重要的題型做整體而詳細的思路分析和講解說明，精編細撰出這本"翻轉微積分"，期能幫助想藉由翻轉學習的同學, 在短時間內能對微積分有全盤性的認識及了解，進而讓同學翻轉成績, 翻轉未來。

輔助學習微積分常用的電腦軟體有 GeoGebra，這是一套開源軟體, 官方網站為 https://www.geogebra.org/，及 Wolfram Mathematica，官方網站為 https://www.wolfram.com/mathematica/，同學可以安裝在電腦或手機中, 這兩套軟體對於初學微積分的同學, 是一個非常實用而且重要的工具。

本書手稿雖經多次修訂及校對, 但仍難免有所疏漏之處, 敬請各位老師和同學不吝賜教，網址為 http://www.superyu.idv.tw。

數學 電腦軟體

喻超凡 YouTube

喻超凡

2024. 6.

喻超凡老師的家

超凡小鋪網址: https://mall.iopenmall.tw/059897/index.php

iOPEN Mall超凡小鋪

蝦皮超凡小鋪

喻超凡喻超弘 YouTube：https://YouTube.com/@supyu

喻超凡*Instagram*

喻超凡YouTube

喻超凡雲端翻轉數學教室：https://www.superyu.idv.tw

Line 微積分群組

喻超凡雲端教室

目錄

第 4 章 定積分及其應用

4.1 定積分 (The Definite Integral)

4.1.1 定積分的基本性質

1. 定積分的定義

(1) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(z_i)\ \Delta x_i$ ，其中 $z_i \in [x_{i-1}\ ,\ x_i]$ ，$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ ，且 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\max_i\{\Delta x_i\} \to 0$ ，如圖 (4.1), 若上式極限存在，則稱函數 f 在區間 $[a\,, b]$ 中為可積 (integrable) 函數。(積分符號 $\displaystyle\int$ 是 Leibniz 所提出的)

(2) 定積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ 的幾何意義，為 $y = f(x)$ 的圖形在直線 $x = a$ 及 $x = b$ 之間與 x 軸所圍的有向面積 (又稱為廣義的面積)，如圖 (4.1)。

(a) 在 x 軸上方的面積為正。

(b) 在 x 軸下方的面積為負。

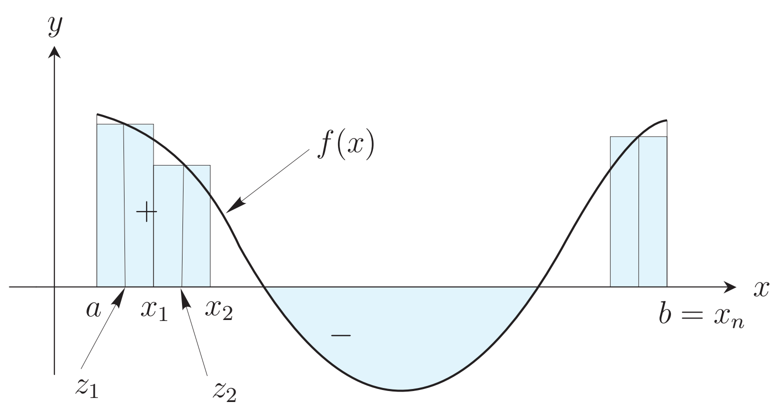


Figure 4.1: 定積分

2. 基本性質

(1) $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx + \int_b^c f(x)\ dx = \int_a^c f(x)\ dx$

(2) $\int_a^a f(x)\,dx = 0$, 故 $\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^a f(x)\,dx = 0$, 則 $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

(3) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(u)\,du$

(4) $\int_a^b [\,f(x) \pm g(x)\,]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$

(5) $\int_a^b k\,f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$; k 爲常數 。

(6) $f(x) \le g(x)$; $\forall x \in [a\,,\,b]$, 則 $\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$

(7) $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$

4.1.2 積分均值定理 (The Mean Value Theorem for Integrals)

1. 定理：設函數 f 在 $[a\,,\,b]$ 中爲連續的函數 , 則 $\exists\, c \in [a\,,\,b]$, 使得

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)\,(b-a)$$

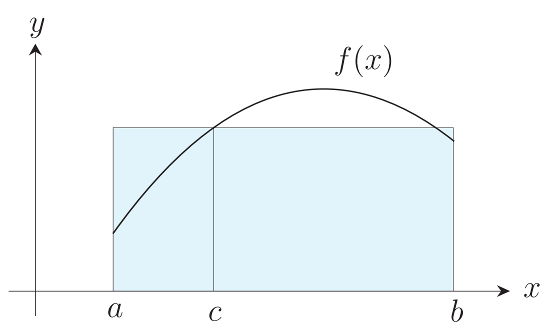


Figure 4.2: 積分均值定理

Note : $f(c)$ 稱爲函數 f 在 $[a\,,\,b]$ 中的平均值 。

2. 等價的定義：

(1) 設 f 在 $[a\,,\,a+h]$ 中爲連續的函數 , $\int_a^{a+h} f(x)\,dx = f(a+\theta h)\cdot h$; $(0 \le \theta \le 1)$

(2) 設 f 在 $[a\,,b]$ 中爲連續的函數，則 $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx = f(c)\int_a^b 1\cdot dx\ \ ;\ \ c\in[a\,,b]$

(3) 設 f 在 $[a\,,b]$ 中爲連續的函數，且 g 爲在 $[a\,,b]$ 中，函數值符號不變的函數，則

$$\int_a^b f(x)g(x)\ dx = f(c)\int_a^b g(x)\ dx\ ;\ c\in[a\,,b]$$

4.1.3 微積分基本定理 (Fundamental Theorem of the Calculus)*

1. 微積分基本定理 (Fundamental Theorem of the Calculus)

設 f 在 $[a\,,b]$ 上爲連續的函數

(1) 若 $F(x)=\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt\ ,\forall\, x\in[a\,,b\,]$，則 $F'(x)=f(x)\ ,\forall\, x\in(a\,,b)$

(2) 若函數 G 爲 f 之反導數 (antiderivative)，即 $G'(x)=f(x)\ ,\forall x\in(a\,,b)$，則

$$\int_a^b f(x)\ dx = G(b)-G(a) = G(x)\Big|_a^b = \Big[\int f(x)\ dx\Big]_a^b$$

2. 微積分基本定理推廣

(1) 若 $F(x)=\displaystyle\int_a^{u(x)} f(t)\ dt$，則

$$F'(x)=\frac{d}{dx}\int_a^{u(x)} f(t)\ dt = \frac{d}{du}\Big[\int_a^u f(t)\ dt\Big]\cdot\frac{du}{dx} = f(u(x))\,u'(x)$$

(2) 若 $F(x)=\displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\ dt$，則

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{d}{dx}\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\ dt \\ &= \frac{d}{dx}\Big[\int_a^{v(x)} f(t)\ dt - \int_a^{u(x)} f(t)\ dt\Big] \\ &= f(v(x))\cdot v'(x) - f(u(x))\cdot u'(x) \end{aligned}$$

---

*Fundamental Theorem of the Calculus 第1個由 James Gregory (Nov 1638∼ Oct 1675 蘇格蘭數學家、天文學家) 發表和基本形式的幾何證明，接下來由 Isaac Barrow (Oct 1630∼May 1677 英國數學家) 證明了該定理的一般形式，Barrow 學生 Isaac Newton (Dec 1642∼ March 1726 一位英格蘭物理學家、數學家、天文學家、自然哲學家和煉金術士) 讓該定理的相關數學理論更完整。最後由 Gottfried Wilhelm Leibniz (Jul 1646∼ Nove 1716 德國哲學家、數學家) 將相關理論實現系統化, 並引入了沿用至今的微積分符號 $\displaystyle\int$。

精選範例

1. 何謂積分均值定理 (Mean Value Theorem for definite integrals)？並證明之。

《政大數學》

《解》 ☞

(1) 積分均值定理：設函數 f 在 $[a\,,b]$ 中為連續的函數，則 $\exists\, c \in [a\,,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)\ dx = f(c)\,(b-a)$$

(2) (a) 若 $f(x)$ 為常數函數，則 c 為 $[a\,,b]$ 中的任意點。

(b) 若 $f(x)$ 在 $[a\,,b]$ 中不為常數函數，因為 $f(x)$ 在 $[a\,,b]$ 為連續，由極值定理可知

$$\exists\, u\,,v \in [a\,,b]\,, \ni f(u) \le f(x) \le f(v)\,, \forall\, x \in [a\,,b]$$

故

$$\int_a^b f(u)\ dx \le \int_a^b f(x)\ dx \le \int_a^b f(v)\ dx$$

即

$$f(u)(b-a) \le \int_a^b f(x)\ dx \le f(v)(b-a)$$

上式同除 $(b-a)$，可得

$$f(u) \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ dx \le f(v)$$

設 $u < v$，再由介值定理可知，$\exists\, c \in (u\,,v) \subset [a\,,b]$，使得

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

故

$$\int_a^b f(x)\ dx = f(c)\,(b-a)\quad ;\quad c \in [a\,,b]$$

2. 何謂微積分基本定理 (The Fundamental Theorem of Calculus)？並證明之。

《解》 ☞

(1) 微積分基本定理：設 f 在 $[a\,,\,b]$ 上爲連續的函數

(a) 若 $F(x)=\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt\ ,\ \forall\,x\in[a\,,\,b\,]$，則 $F'(x)=f(x)\ ,\ \forall\,x\in(a\,,\,b)$

(b) 若函數 G 爲 f 之反導數 (antiderivative)，即 $G'(x)=f(x)\ ,\ \forall x\in(a\,,\,b)$，則

$$\int_a^b f(x)\ dx=G(b)-G(a)=G(x)\Big|_a^b$$

(2)

(a)

$$\begin{aligned}
F'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} \quad \text{（導數的定義得知）}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\displaystyle\int_a^{x+h} f(t)dt-\int_a^x f(t)dt}{h} \quad \text{（}F(x)\text{ 的定義得知）}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\displaystyle\int_a^{x} f(t)dt+\int_x^{x+h} f(t)dt-\int_a^x f(t)dt}{h} \quad \text{（定積分的基本性質）}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\displaystyle\int_x^{x+h} f(t)dt}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+\theta h)\cdot h}{h}\ ;\ (0\le\theta\le 1) \quad \text{（積分均值定理）}\\
&= \lim_{h\to 0} f(x+\theta h)\\
&= f(\lim_{h\to 0}(x+\theta h)) \quad \text{（連續性質）}\\
&= f(x)
\end{aligned}$$

(b) 因 $F'(x)=f(x)$、$G'(x)=f(x)$，故

$$F(x)=G(x)+k \tag{1}$$

令 $x=a$ 代回 (1) 式可得

$$F(a)=G(a)+k$$

即

$$F(a)=\int_a^a f(t)dt=0=G(a)+k$$

故 $k=-G(a)$，再令 $x=b$ 代回 (1) 式可得

$$F(b)=\int_a^b f(t)dt=G(b)+k=G(b)-G(a)=G(x)\Big|_a^b$$

3.
(a) 求極限值 $\lim_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2}\sin(t^2)\ dt}{x^6}$ (b) 求 $\lim_{x\to 0^+} x\cdot\int_x^1\dfrac{\cos t}{t^2}\ dt=?$ 《台大》

《解》 ☞ (a)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}\sin(t^2)\ dt}{x^6} &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x^4\cdot 2x}{6x^5}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^4}{3x^4}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\cos x^4\cdot 4x^3}{12x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x^4}{3}\\ &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

(b) 因

$$\begin{aligned}\int_{0^+}^1\frac{\cos t}{t^2}\ dt &= \int_{0^+}^1\cos t\ d(-\frac{1}{t})=-\frac{1}{t}\cos t\ \Big|_{0^+}^1-\int_{0^+}^1\frac{\sin t}{t}dt\\ &= \infty\quad (\text{因 } \frac{\sin t}{t} \text{ 於 } (0^+,1) \text{ 爲有界})\end{aligned}$$

故

$$\lim_{x\to 0^+} x\int_x^1\frac{\cos t}{t^2}\ dt=\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_x^1\frac{\cos t}{t^2}\ dt}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-\frac{\cos x}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0^+}\cos x=1$$

4. Find $\lim_{x\to\infty}\dfrac{\int_0^x\exp(t^2)\ dt}{x^2}$. 《成大》

《解》 ☞ $\lim_{x\to\infty}\dfrac{\int_0^x\exp(t^2)\ dt}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\dfrac{e^{x^2}}{2x}=\lim_{x\to\infty}\dfrac{2xe^{x^2}}{2}=\infty$

5. 求 $\lim_{x\to\infty} x\int_0^x e^{(t^2-x^2)}\ dt$ 。

《解》 ☞

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} x\int_0^x e^{(t^2-x^2)}\ dt &= \lim_{x\to\infty}\frac{x\int_0^x e^{t^2}\ dt}{e^{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{d}{dx}(x\int_0^x e^{t^2}dt)}{\frac{d}{dx}e^{x^2}} \\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{\int_0^x e^{t^2}\ dt + xe^{x^2}}{2xe^{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{d}{dx}(\int_0^x e^{t^2}\ dt + xe^{x^2})}{\frac{d}{dx}(2xe^{x^2})} \\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{e^{x^2}+e^{x^2}+2x^2e^{x^2}}{2e^{x^2}+4x^2e^{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1+x^2}{1+2x^2} \\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{2x}{4x} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

6. (1) 設函數 $f(x)$ 滿足 $f(x) = 1+3x^2+4x\int_0^1 f(x)\ dx$，求 $f(x) = ?$

(2) 設 f 為連續函數，且 $\int_0^x f(t)\ dt = 3+x+k\ \cos 2x$，試求 $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\ dx$ 。

《解》 ☞ (1) 設 $\int_0^1 f(x)\ dx = A$，故

$$A = \int_0^1 f(x)\ dx = \int_0^1 (1+3x^2+4x\cdot A)\ dx = (x+x^3+2x^2\cdot A)\Big|_0^1 = 2+2A$$

則 $A=-2$，故

$$f(x) = 1+3x^2+4x\cdot(-2) = 1-8x+3x^2$$

(2) 因

$$\int_0^x f(t)\ dt = 3+x+k\ \cos 2x \tag{1}$$

令 $x=0$ 代回 (1) 式可得

$$\int_0^0 f(t)\ dt = 3+0+k = 0$$

故 $k=-3$。再對 (1) 式兩端微分

$$\frac{d}{dx}\int_0^x f(t)dt=\frac{d}{dx}(3+x-3\cos 2x)$$

可得 $f(x)=1+6\sin 2x$，故

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\ dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(1+6\sin 2x)dx=(x-3\cos 2x)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}+3$$

7. 求下列之值

(a) $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_1^{2x}\frac{\sin t}{t^2}\ dt$ (b) $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_{\sin^2 x}^{\cos^2 x}\sqrt{t}\ dt$

《解》 ☞

(a) $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_1^{2x}\frac{\sin t}{t^2}\ dt=\frac{\sin(2x)}{(2x)^2}\cdot\frac{d}{dx}(2x)=\frac{\sin 2x}{(2x)^2}\cdot 2=\frac{\sin 2x}{2x^2}$

(b)

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\int_{\sin^2 x}^{\cos^2 x}\sqrt{t}\ dt &= \sqrt{\cos^2 x}\ \frac{d}{dx}(\cos^2 x)-\sqrt{\sin^2 x}\ \frac{d}{dx}(\sin^2 x)\\ &= |\cos x|\cdot 2\cos x\cdot(-\sin x)-|\sin x|\cdot 2\sin x\cdot\cos x\\ &= -\sin 2x\cdot(|\cos x|+|\sin x|)\end{aligned}$$

8. Given $f(t)=\begin{cases}1 & ;\ t\le 0\\ 1-t & ;\ t>0\end{cases}$ and $F(x)=\displaystyle\int_{-1}^{2ax+2}f(t)\,dt$ with $a>0$, find a so that F is maximum at $x=-2a$. 《台綜大A》

《解》 ☞ (1) 求臨界點：因

$$\begin{aligned}F'(x) &= f(2ax+2)\,2a=2a\cdot\begin{cases}1 & ;\ 2ax+2\le 0\\ 1-(2ax+2) & ;\ 2ax+2>0\end{cases}\\ &= 2a\cdot\begin{cases}1 & ;\ x\le -\dfrac{1}{a}\\ -2ax-1 & ;\ x>-\dfrac{1}{a}\end{cases}\end{aligned}$$

由 $F'(x) = 0$, 可得 $-2ax - 1 = 0$, 故臨界點為 $x = -\dfrac{1}{2a}$ 。(沒有 $F'(x)$ 不存在的點)

(2) 因 $F''(-\dfrac{1}{2a}) = -4a^2 < 0$, 故 $F(-\dfrac{1}{2a})$ 為極大值, 由題意可知, $x = -\dfrac{1}{2a} = -2a$, 故 $4a^2 = 1$, 則 $a = \pm\dfrac{1}{2}$, 因 $a > 0$, 故 $a = \dfrac{1}{2}$ 。

9. 求 $\displaystyle\lim_{a\to 0}\int_a^{2a} \frac{e^{2x}}{x}\ dx$

《提示》 ➥ 定積分的上下限非常的近時, 可以利用積分均值定理來求解定積分 。

《解》 ☞ 因 e^{2x} 為連續函數 , 故 $\exists c \in (a\,,\,2a)$, 使得

$$\begin{aligned}\int_a^{2a} \frac{e^{2x}}{x}\ dx &= e^{2c}\int_a^{2a} \frac{1}{x}\ dx = e^{2c}\ \ln|x|\ \Big|_a^{2a}\\ &= e^{2c}(\ln|2a| - \ln|a|) = e^{2c}\ \ln|\frac{2a}{a}|\\ &= e^{2c}\ \ln 2\end{aligned}$$

因 $c \in (a\,,\,2a)$, 故 $a < c < 2a$, 且 $\displaystyle\lim_{a\to 0} a = \lim_{a\to 0} 2a = 0$, 由夾擠定理可知 $\displaystyle\lim_{a\to 0} c = 0$, 則

$$\lim_{a\to 0}\int_a^{2a} \frac{e^{2x}}{x}dx = \lim_{a\to 0} e^{2c}\ \ln 2 = \lim_{c\to 0} e^{2c}\ \ln 2 = \ln 2$$

10. 已知函數 f 在 $[-a\,,\,a]$ 中為連續的函數 , 試證

(a) 若 f 為偶函數 , 則 $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\ dx = 2\int_0^a f(x)\ dx$

(b) 若 f 為奇函數 , 則 $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\ dx = 0$

《提示》 ➥ 1. 若 $f(x)$ 滿足 $f(-x) = f(x)$, 則稱 $f(x)$ 為偶函數 , 且 $f(x)$ 的圖形對稱鉛直軸 。

2. 若 $f(x)$ 滿足 $f(-x) = -f(x)$, 則稱 $f(x)$ 為奇函數 , 且 $f(x)$ 的圖形對稱原點 。

《解》 ☞ (a) 因 $f(x)$ 為偶函數 , 故 $f(-x) = f(x)$, 則

$$\int_{-a}^{a} f(x)\ dx = \int_0^a f(x)\ dx + \int_{-a}^{0} f(x)\ dx$$

$$\left(\text{令 } u=-x \text{ , 故 } dx=-du \text{ , } \begin{array}{c|c|c} x & -a & 0 \\ \hline u & a & 0 \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^a f(x)\ dx - \int_a^0 f(-u)\ du \\
&= \int_0^a f(x)\ dx + \int_0^a f(-x)\ dx \\
&= \int_0^a f(x)\ dx + \int_0^a f(x)\ dx \\
&= 2\int_0^a f(x)dx
\end{aligned}$$

(b) 因 $f(x)$ 爲奇函數，故 $f(-x)=-f(x)$，則

$$\begin{aligned}
\int_{-a}^a f(x)\ dx &= \int_0^a f(x)\ dx + \int_{-a}^0 f(x)\ dx \\
&\quad \left(\text{令 } u=-x \text{ , 故 } dx=-du \text{ , } \begin{array}{c|c|c} x & -a & 0 \\ \hline u & a & 0 \end{array} \right) \\
&= \int_0^a f(x)\ dx - \int_a^0 f(-u)\ du \\
&= \int_0^a f(x)\ dx + \int_0^a f(-x)\ dx \\
&= \int_0^a f(x)\ dx - \int_0^a f(x)\ dx \\
&= 0
\end{aligned}$$

11. 求下列積分

(a) $\displaystyle\int_{-2}^{2} \frac{\sin^3 x}{2+\cos x}\ dx$ 《高大》 (b) $\displaystyle\int_{-7}^{7} x^3\sqrt{5x^6+3}\ dx$

(c) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\cos^2 x}\ dx$ (d) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin^3 x\cdot e^{-x^2}+\cos^2 x)\,dx$ 《政大》

《提示》 ➥ 積分 $\displaystyle\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\,dx$，必須要先判斷被積分函數 $f(x)$ 是否爲奇偶函數。

設 f 爲 $[-\ell,\ell]$ 中的函數

1. 常見的奇函數：x、x^3、x^5、$\cdots$；$\sin(ax)$、$\tan(ax)$；$\sin^{-1}(ax)$、$\tan^{-1}(ax)$；

$\sinh(ax)$、$\tanh(ax)$

2. 常見的偶函數：常數、x^2、x^4、$\cdots$; $\cos(ax)$; $\cosh(ax)$; |奇偶函數| ; f(偶函數)

3. 奇偶函數的四則運算：(偶函數視爲 "+" , 奇函數視爲 "−")

偶函數 $\times(\div)$ 偶函數 $=$ 偶函數。(正 $\times(\div)$ 正 $=$ 正)

奇函數 $\times(\div)$ 奇函數 $=$ 偶函數。(負 $\times(\div)$ 負 $=$ 正)

偶函數 $\times(\div)$ 奇函數 $=$ 奇函數。(正 $\times(\div)$ 負 $=$ 負)

偶函數 $\pm$ 偶函數 $=$ 偶函數。(正 $+$ 正 $=$ 正)

奇函數 $\pm$ 奇函數 $=$ 奇函數。(負 $+$ 負 $=$ 負)

偶函數 $\pm$ 奇函數 $=$ 不奇不偶的函數。

《解》 ☞

(a) 因 $\sin^3 x$ 爲奇函數，$2+\cos x$ 爲偶函數，故 $\dfrac{\sin^3 x}{2+\cos x}$ 爲奇函數，則

$$\int_{-2}^{2} \frac{\sin^3 x}{2+\cos x}\, dx = 0$$

(b) 因 x^3 爲奇函數，$\sqrt{5x^6+3}$ 爲偶函數，故 $x^3\sqrt{5x^6+3}$ 爲奇函數，則

$$\int_{-7}^{7} x^3\sqrt{5x^6+3}\, dx = 0$$

(c) 因 $\sqrt{1-\cos^2 x}$ 爲偶函數，則

$$\begin{aligned}
\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\cos^2 x}\, dx &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\cos^2 x}\, dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin^2 x}\, dx \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin x|\, dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx \\
&= 2(-\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2
\end{aligned}$$

(d) 因 $\sin^3 x \cdot e^{-x^2}$ 爲奇函數, $\cos^2 x$ 爲偶函數，故 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cdot e^{-x^2}\, dx = 0$，則

$$\begin{aligned}
\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin^3 x \cdot e^{-x^2} + \cos^2 x)\, dx &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cdot e^{-x^2}\, dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\, dx \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\, dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2x}{2}\, dx \\
&= 2\left(\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

12. 求下列積分

(a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^5 x \ dx$ 《清大》 (b) $\displaystyle\int_{-2}^{1} \frac{x}{\sqrt{3+x}} \ dx$

(c) $\displaystyle\int_0^1 x^2 (1-x)^{10} \ dx$ (d) $\displaystyle\int_0^1 x^2 \cdot e^x \ dx$

《解》 ☞

(a)

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^5 x \ dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^4 x \cdot \cos x \ dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1-\sin^2 x)^2 \ d(\sin x) \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1-2\sin^2 x+\sin^4 x)\, d(\sin x) \\
&= \left(\sin x - \frac{2}{3}\sin^3 x + \frac{1}{5}\sin^5 x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \\
&= \frac{43\sqrt{2}}{120}
\end{aligned}$$

(b) 令 $u=\sqrt{3+x}$, 故 $u^2=3+x$, $2u\,du=dx$, 且

x	-2	1
u	1	2

則

$$\begin{aligned}
\int_{-2}^{1} \frac{x}{\sqrt{3+x}} \ dx &= \int_1^2 \frac{u^2-3}{u} \cdot 2u \ du \\
&= 2\int_1^2 (u^2-3) \ du \\
&= 2\left(\frac{1}{3}u^3 - 3u \right) \Big|_1^2 \\
&= -\frac{4}{3}
\end{aligned}$$

(c) 令 $u=1-x$, 故 $dx=-du$, 且

x	0	1
u	1	0

則

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^2(1-x)^{10}\,dx &= \int_1^0 (1-u)^2\cdot u^{10}\,(-du)\\ &= \int_0^1 (u^{10}-2u^{11}+u^{12})\,du\\ &= \left(\frac{u^{11}}{11}-\frac{2}{12}u^{12}+\frac{u^{13}}{13}\right)\Big|_0^1\\ &= \frac{1}{11}-\frac{1}{6}+\frac{1}{13}=\frac{1}{858}\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{array}{ll} \text{微} & \text{積}\\ +\,x^2 & e^x\\ -\,2x & e^x\\ +\,2 & e^x\\ -\,0 & e^x \end{array}$$

$$\int_0^1 x^2\cdot e^x\,dx = (\,x^2e^x-2x\,e^x+2e^x\,)\Big|_0^1 = e-2e+2e-2=e-2$$

13. 求下列積分

(a) $\displaystyle\int_{-1}^{2} |x^2-x|\,dx$ 《中興》 (b) $\displaystyle\int_0^2 \min\{3x\,,\,4-x^2\}\,dx$

(c) $\displaystyle\int_2^7 x\left\lfloor \frac{x}{3}\right\rfloor dx$

《提示》 ➥ 先劃分積分區間, 以消除特殊函數。

《解》 ☞ (a) 令 $f(x)=x^2-x=x(x-1)=0$, 故 $x=0$ 、1 , 且

x		-1		1	
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$$\int_{-1}^{2}|x^2-x|\,dx = \int_{-1}^{0}(x^2-x)\,dx+\int_0^1 -(x^2-x)dx+\int_1^2(x^2-x)dx$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-1}^{0}+\left(-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{0}^{1}+\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{1}^{2}\\
&= 0-\left(\frac{-1}{3}-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)-0+\left(\frac{8}{3}-2\right)-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)\\
&= \frac{11}{6}
\end{aligned}$$

(b) 令 $g(x)=3x-(4-x^2)=(x+4)(x-1)=0$，故 $x=-4$、$x=1$，且

x		-4		1	
$g(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
	$3x>4-x^2$		$3x<4-x^2$		$3x>4-x$

$$\begin{aligned}
\int_0^2 \min\{3x\,,\,4-x^2\}\,dx &= \int_0^1 \min\{3x\,,\,4-x^2\}\,dx+\int_1^2 \min\{3x\,,\,4-x^2\}\,dx\\
&= \int_0^1 3x\,dx+\int_1^2 (4-x^2)\,dx\\
&= \frac{3}{2}x^2\Big|_0^1+\left(4x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_1^2\\
&= \frac{3}{2}-0+\left(8-\frac{8}{3}\right)-\left(4-\frac{1}{3}\right)=\frac{19}{6}
\end{aligned}$$

(c) 令 $\left\lfloor \frac{x}{3}\right\rfloor=n$，故 $n\le\frac{x}{3}<n+1$，則 $3n\le x<3(n+1)$，因此

$\left\lfloor \frac{x}{3}\right\rfloor=n$	0	1	2
x	$0\le x<3$	$3\le x<6$	$6\le x<9$

$$\begin{aligned}
\int_2^7 x\left\lfloor \frac{x}{3}\right\rfloor dx &= \int_2^3 (x\cdot 0)\,dx+\int_3^6 (x\cdot 1)\,dx+\int_6^7 (x\cdot 2)\,dx\\
&= 0+\frac{x^2}{2}\Big|_3^6+x^2\Big|_6^7=18-\frac{9}{2}+49-36=\frac{53}{2}
\end{aligned}$$

14. (a) 試證 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x\,,\,\cos x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x\,,\,\sin x)\,dx$

(b) 利用 (a) 求 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n x}{\sin^n x+\cos^n x}\,dx$ 《中山材光》

《提示》 ➥ 利用互餘變換（令 $u=\frac{\pi}{2}-x$）證明。

《解》 ☞ (a) 令 $u=\frac{\pi}{2}-x$，故 $x=\frac{\pi}{2}-u$，則 $dx=-du$，且 $\begin{array}{c|c|c} x & 0 & \frac{\pi}{2} \\ \hline u & \frac{\pi}{2} & 0 \end{array}$，故

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x\,,\,\cos x)dx &= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 f\Big(\sin(\frac{\pi}{2}-u)\,,\,\cos(\frac{\pi}{2}-u)\Big)(-du) \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos u\,,\,\sin u)du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x\,,\,\sin x)dx\end{aligned}$$

(b) 令

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n x}{\sin^n x+\cos^n x}dx \tag{1}$$

由 (a) 可知

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^n x}{\sin^n x+\cos^n x}dx \tag{2}$$

由 (1) 式 + (2) 式可得

$$\begin{aligned}2I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n x}{\sin^n x+\cos^n x}\,dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^n x}{\sin^n x+\cos^n x}\,dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n x+\cos^n x}{\sin^n x+\cos^n x}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,dx=\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

故

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n x}{\sin^n x+\cos^n x}\,dx=\frac{\pi}{4}$$

15. (a) 試證 $\int_0^{\pi} x\,f(\sin x)\,dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\,dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx$

(b) 利用 (a) 求 $\int_0^{\pi} x\sin^2 x\,dx$ 《中興資工、土木》

(c) $\int_0^{\pi} \frac{x\,\sin x}{1+\cos^2 x}dx$ 《台大B》

《提示》 ➥ 利用互補變換（令 $u=\pi-x$）證明。

《解》 ☞ (a)

(i) 令 $u=\pi-x$, 故 $dx=-du$, 且 $\begin{array}{c|c|c} x & 0 & \pi \\ \hline u & \pi & 0 \end{array}$, 則

$$\begin{aligned}\int_0^\pi x\,f(\sin x)\;dx &= \int_\pi^0 (\pi-u)f(\sin(\pi-u))(-du)\\ &= \int_0^\pi (\pi-u)f(\sin u)\;du\\ &= \pi\int_0^\pi f(\sin u)\;du-\int_0^\pi uf(\sin u)\;du\\ &= \pi\int_0^\pi f(\sin x)\;dx-\int_0^\pi xf(\sin x)\;dx\end{aligned}$$

將 $\int_0^\pi x\,f(\sin x)\;dx$ 移項到等號的左邊, 可得

$$2\int_0^\pi x\,f(\sin x)\;dx=\pi\int_0^\pi f(\sin x)\;dx$$

故

$$\int_0^\pi xf(\sin x)\;dx=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)\;dx$$

(ii) 令 $u=\pi-x$, 故 $dx=-du$, 且 $\begin{array}{c|c|c} x & \frac{\pi}{2} & \pi \\ \hline u & \frac{\pi}{2} & 0 \end{array}$, 則

$$\begin{aligned}\int_0^\pi f(\sin x)dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\;dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^\pi f(\sin x)\;dx\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\;dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^0 f(\sin(\pi-u))(-du)\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\;dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin u)\;du\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx\\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx\end{aligned}$$

故

$$\int_0^\pi xf(\sin x)\;dx=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)\;dx=\frac{\pi}{2}\cdot 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\;dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\;dx$$

(b)

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} x\sin^2 x\ dx &= \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\sin^2 x\ dx = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\ dx\\ &= \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 2x}{2}\ dx = \pi(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\sin 2x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{4}\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi}\frac{x\ \sin x}{1+\cos^2 x}dx &= \int_0^{\pi}\frac{x\ \sin x}{1+1-\sin^2 x}dx = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+1-\sin^2 x}dx\\ &= \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{-1}{1+\cos^2 x}d(\cos x)\\ &= \pi\Big[-\tan^{-1}(\cos x)\Big]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi\cdot\tan^{-1}(1) = \pi\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi^2}{4}\end{aligned}$$

16. 求 $\int_{-1}^{2}|x|\cdot\lfloor x\rfloor\ dx = ?$ Hint：分段討論以消去特殊函數 。

《解》 ☞ 因

$$|x| = \begin{cases}-x & ;\ x<0\\ x & ;\ x\ge 0\end{cases} \quad \text{又} \quad \lfloor x\rfloor = \begin{cases}-1 & ;\ -1<x<0\\ 0 & ;\ 0\le x<1\\ 1 & ;\ 1\le x<2\end{cases}$$

故

$$|x|\cdot\lfloor x\rfloor = \begin{cases}x & ;\ -1<x<0\\ 0 & ;\ 0\le x<1\\ x & ;\ 1\le x<2\end{cases}$$

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{2}|x|\cdot\lfloor x\rfloor\ dx &= \int_{-1}^{0}x\ dx+\int_0^1 0\ dx+\int_1^2 x\ dx\\ &= \frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{0}+\frac{x^2}{2}\Big|_1^2 = 1\end{aligned}$$

17. 求下列積分

(a) $\int_4^9\frac{1}{x-\sqrt{x}}dx$ (b) $\int_1^2\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx$ 《海洋》

(c) $\int_0^3\frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}dx$ 《海洋》

《解》☞

(a) 令 $x=t^2$，$dx=2t\ dt$，且 $\begin{array}{c|c|c} x & 4 & 9 \\ \hline t & 2 & 3 \end{array}$，故

$$\int_4^9 \frac{1}{x-\sqrt{x}}\ dx=\int_2^3 \frac{1}{t^2-t}\ 2t\ dt=2\int_2^3 \frac{1}{t-1}\ dt=2\ln|t-1|\Big|_2^3=2\ln 2$$

(b) 令 $x^2-1=t^2$，故 $2x\ dx=2t\ dt$、$x=\sqrt{t^2+1}$，且 $\begin{array}{c|c|c} x & 1 & 2 \\ \hline t & 0 & \sqrt{3} \end{array}$，則

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\ dx &= \int_0^{\sqrt{3}} \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\cdot\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\ dt=\int_0^{\sqrt{3}} \frac{t^2+1-1}{t^2+1}\ dt \\ &= \int_0^{\sqrt{3}} 1\ dt-\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{t^2+1}\ dt=t\ \Big|_0^{\sqrt{3}}-\tan^{-1}t\ \Big|_0^{\sqrt{3}} \\ &= \sqrt{3}-0-(\frac{\pi}{3}-0)=\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}\end{aligned}$$

(c) 令 $x=t^2$，故 $dx=2t\ dt$，且 $\begin{array}{c|c|c} x & 0 & 3 \\ \hline t & 0 & \sqrt{3} \end{array}$，則

$$\begin{aligned}\int_0^3 \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}\ dx &= \int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{(1+t^2)t}\,2t\ dt \\ &= \int_0^{\sqrt{3}} \frac{2}{1+t^2}\ dt=2\tan^{-1}t\ \Big|_0^{\sqrt{3}} \\ &= 2\,(\frac{\pi}{3}-0\,)=\frac{2}{3}\pi\end{aligned}$$

18. 設 $x=e^y+y-1$，試求 $\displaystyle\int_0^e y\ dx$ 之值。

《解》☞ 因為 $x=e^y+y-1$，故 $dx=(e^y+1)dy$，且

x	0	e
y	0	1

則

$$\begin{aligned}\int_0^e y\ dx &= \int_0^1 y\cdot(e^y+1)dy=\int_0^1 y\,e^y\ dy+\int_0^1 y\ dy \\ &= \int_0^1 y\ d(e^y)+\frac{1}{2}y^2\Big|_0^1=(y\,e^y-e^y)\Big|_0^1+\frac{1}{2}-0 \\ &= e-e+1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\end{aligned}$$

19. 試求 a、b 使得函數 $f(x) = (ax+b)\,e^x$ 滿足 $f(x) = e^x - 1 + \int_0^x f(t)\;dt$。

《解》 ☞ 因

$$f(x) = e^x - 1 + \int_0^x f(t)\;dt \tag{1}$$

故

$$f(0) = 1 - 1 + \int_0^0 f(t)\;dt = 1 - 1 + 0 = 0$$

又 $f(x) = (ax+b)e^x$，故 $f(0) = b = 0$，再將 $f(x)$ 代回 (1) 式可得

$$(ax+b)e^x = e^x - 1 + \int_0^x (at+b)e^t\;dt$$

將 $b=0$ 代入上式可得

$$\begin{aligned} ax \cdot e^x &= e^x - 1 + \int_0^x at\,e^t\,dt \\ &= e^x - 1 + a(te^t - e^t)\Big|_0^x \\ &= e^x - 1 + axe^x - ae^x + a \end{aligned}$$

整理可得

$$(a-1)(1-e^x) = 0$$

因 $(1-e^x) \neq 0$，故 $a - 1 = 0$，即 $a = 1$。

20. 試求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{1}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}\;dx$，其中 a、$b \neq 0$。 《成大》

《解》 ☞ 由 Weierstrass 代換 (上冊第395頁) 可知, 令 $z = \tan x$，故 $\cos^2 x = \dfrac{1}{1+z^2}$、$\sin^2 x = \dfrac{z^2}{1+z^2}$、$dx = \dfrac{1}{1+z^2}\,dz$，且

x	0	$\pi/2$
z	0	∞

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}\;dx = \int_0^{\infty} \frac{1}{a^2 \cdot \dfrac{1}{1+z^2} + b^2 \cdot \dfrac{z^2}{1+z^2}} \cdot \frac{1}{1+z^2}\,dz$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^{\infty} \frac{1}{a^2+b^2z^2}\,dz = \frac{1}{a^2}\int_0^{\infty} \frac{1}{1+(\frac{b}{a})^2z^2}\,dz \\
&= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{a^2}\int_0^{t} \frac{1}{1+(\frac{b}{a})^2z^2}\,dz \\
&= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{|ab|}\tan^{-1}(\frac{|a|}{|b|}\,z)\Big|_0^t \\
&= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{|ab|}\tan^{-1}(\frac{|a|}{|b|}\,t) = \frac{\pi}{2|ab|}
\end{aligned}
$$

21. Let $g(x)$ be the inverse function of strictly increasing function $f(x)=x^5+3x^3+1$. Then $\displaystyle\int_{f(0)}^{f(1)} g(x)\,dx = ?$ 《台大C》

《解》 ☞ 令 $y=f(x)$，故 $x=f^{-1}(y)=g(y)$，$dy=d(f(x))$，且

y	$f(0)$	$f(1)$
x	0	1

，則

$$
\begin{aligned}
\int_{f(0)}^{f(1)} g(x)\,dx &= \int_{f(0)}^{f(1)} g(y)\,dy = \int_0^1 x\,d(f(x)) = \int_0^1 x\,f'(x)\,dx \\
&= \int_0^1 x\cdot(5x^4+9x^2)\,dx = (\frac{5}{6}x^6+\frac{9}{4}x^4)\Big|_0^1 = \frac{37}{12}
\end{aligned}
$$

Note：公式：設 $g(x)$ 爲 $f(x)$ 的反函數, 則 $\displaystyle\int_{f(a)}^{f(b)} g(x)\,dx = \int_a^b x\,d(f(x))$

挑戰範例

1. Suppose $f^2(x)$, $g^2(x)$, $f(x)g(x)$ are all integrable functions in the interval $[0\,,\,1]$.

(a) Please prove the inequality

$$\left[\int_0^1 f^2(x)\,dx\right]\left[\int_0^1 g^2(x)\,dx\right] \geq \left[\int_0^1 f(x)g(x)\,dx\right]^2$$

Hint : $(tf(x)+g(x))^2 \geq 0$ for all $x \in [0\,,\,1]$ and $t \in \mathbb{R}$.

(b) Please show that $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^n}dx \geq \frac{n+1}{n+2}$ for all $n > 0$

Hint : use (a). 《政大國貿資管》

《解》 ☞ (a) 因 $(tf(x)+g(x))^2 \geq 0$, $\forall x \in [0\,,\,1]$, 故 $\displaystyle\int_0^1 \Big[tf(x)+g(x)\Big]^2 dx \geq 0$, 即

$$\begin{aligned}&\int_0^1 \Big[t^2 f^2(x) + 2tf(x)g(x) + g^2(x)\Big]\,dx \\ =\ & t^2\int_0^1 f^2(x)\,dx + 2t\int_0^1 f(x)g(x)\,dx + \int_0^1 g^2(x)\,dx \geq 0\end{aligned}$$

由一元二次方程式的性質可知

$$\left[2\int_0^1 f(x)g(x)\,dx\right]^2 - 4\int_0^1 f^2(x)\,dx\cdot\int_0^1 g^2(x)\,dx \leq 0$$

故

$$\int_0^1 f^2(x)\,dx\cdot\int_0^1 g^2(x)\,dx \geq \left[\int_0^1 f(x)g(x)\,dx\right]^2 \tag{1}$$

(b) 令 $f(x)=\sqrt{\dfrac{1}{1+x^n}}$ 、$g(x)=\sqrt{1+x^n}$, 故

$$\int_0^1 f^2(x)\,dx = \int_0^1 \left[\sqrt{\frac{1}{1+x^n}}\,\right]^2 dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\,dx \tag{2}$$

$$\begin{aligned}\int_0^1 g^2(x)\,dx &= \int_0^1 (\sqrt{1+x^n}\,)^2\,dx = \int_0^1 (1+x^n)\,dx \\ &= \left(x+\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)\Big|_0^1 = (1+\frac{1}{n+1}) = \frac{n+2}{n+1}\end{aligned} \tag{3}$$

$$\int_0^1 f(x)g(x)\,dx = \int_0^1 \sqrt{\frac{1}{1+x^n}} \cdot \sqrt{1+x^n}\,dx = \int_0^1 dx = 1 \tag{4}$$

把上 (2)、(3)、(4) 式代入 (1) 式中可得 $\int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\,dx \cdot \frac{n+2}{n+1} \geq 1$

即 $\int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\,dx \geq \frac{n+1}{n+2}$

2. Find a function f satisfying : $f(x) = 1 + \int_0^x [\,1 + f(t)^2\,] \cos t\ dt$. 《清大》

《解》 ☞ 因

$$f(x) = 1 + \int_0^x [\,1 + f(t)^2\,] \cos t\ dt \tag{1}$$

令 $y = f(x)$, 對 (1) 式兩端微分可得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}\Big\{1 + \int_0^x [\,1 + f(t)^2\,] \cos t\ dt\Big\} = (1+y^2)\cos x$$

故 $\frac{dy}{1+y^2} = \cos x\ dx$, 兩端積分可得

$$\tan^{-1} y = \sin x + c$$

即 $y = f(x) = \tan(\sin x + c)$, 又

$$f(0) = \tan(\sin 0 + c) = 1 + \int_0^0 [\,1 + f(t)^2\,] \cdot \cos t\ dt = 1$$

故 $c = \frac{\pi}{4}$, 則 $f(x) = \tan(\sin x + \frac{\pi}{4})$

3. 假設 (a) $f(x)$ 為連續函數 , 且當 $x > 0$ 時 , $f(x) > 0$ 。 《台大商研所》
(b) $x > 0$ 時 , $\int_0^x f(t)\ dt = [f(x)]^2$ 。試求 (1) $f(0) = ?$ (2) $x > 0$ 時 , $f(x) = ?$

《解》 ☞ (1) 已知 $\int_0^x f(t)\ dt = [f(x)]^2$, 且 $x > 0,\ f(x) > 0$, 故 $f(x) = \sqrt{\int_0^x f(t)\ dt}$,
因 $f(x)$ 為連續函數 , 則

$$f(0) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \sqrt{\int_0^x f(t)\ dt} = 0$$

(2) $x > 0$ 時

$$\int_0^x f(t)\ dt = [f(x)]^2 \tag{1}$$

對 (1) 式兩端微分

$$\frac{d}{dx}[f(x)]^2 = \frac{d}{dx}\int_0^x f(t)\ dt$$

可得

$$2f(x)f'(x) = f(x)$$

因 $f(x) > 0$，故 $2f'(x) = 1$，則 $f'(x) = \dfrac{1}{2}$，因此

$$f(x) = \frac{x}{2} + c$$

又 $f(0) = 0 = c$，則 $c = 0$，故 $f(x) = \dfrac{x}{2}$。

4. 設 $f(0) = 1$，但 $t \neq 0$ 時 $f(t) = 1 + e^{-t^{-2}}$，令

$$F(x) = \int_{-1}^x f(t)\ dt$$

問 $F(x)$ 在 $x = 0$ 處是否可微分，請說明理由，若可微分，求 $F'(0)$。 《中央》

《解》 ☞ 因

$$\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{t\to 0}(1 + e^{-t^{-2}}) = \lim_{t\to 0}(1 + \frac{1}{e^{1/t^2}}) = 1 = f(0)$$

且 $t \neq 0$ 時，$f(t) = 1 + e^{-t^{-2}}$ 爲連續，故 $f(t)$ 於 $\mathbb{R}$ 上爲連續，則

$$\begin{aligned} F'(0) &= \lim_{x\to 0}\frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\Big[\int_{-1}^x f(t)\ dt - \int_{-1}^0 f(t)\ dt\Big] \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\Big[\int_{-1}^0 f(t)\ dt + \int_0^x f(t)\ dt - \int_{-1}^0 f(t)\ dt\Big] \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\ dt \\ &= \lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = 1 \end{aligned}$$

5. 求 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{ny^{n-1}}{1+y}\ dy$ 之值。 《中興》

《解》☞

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{ny^{n-1}}{1+y}\,dy &= \int_0^1 \frac{1}{1+y}\,d(y^n) = \frac{y^n}{1+y}\Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{y^n}{(1+y)^2}\,dy \\ &= \frac{1}{2} + \int_0^1 \frac{y^n}{(1+y)^2}\,dy \qquad (1)\end{aligned}$$

因 y^n 爲連續函數，故由積分均值定理可知，$\exists\, c \in (0\,,\,1)$，使得

$$\int_0^1 \frac{y^n}{(1+y)^2}\,dy = c^n \int_0^1 \frac{1}{(1+y)^2}\,dy = c^n\,(-\frac{1}{1+y})\ \Big|_0^1 = \frac{1}{2}c^n \qquad (2)$$

將 (2) 式代回 (1) 式可得

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{ny^{n-1}}{1+y}\,dy = \lim_{n\to\infty} (\,\frac{1}{2} + \frac{1}{2}c^n\,) = \frac{1}{2}$$

6. 求 $\displaystyle\int_0^1 \frac{x\,e^x}{(x+1)^2}\,dx$。

《解》☞

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x\,e^x}{(x+1)^2}\,dx &= \int_0^1 \frac{x+1-1}{(x+1)^2}e^x\,dx = \int_0^1 \Big[\,\frac{e^x}{x+1} - \frac{e^x}{(x+1)^2}\,\Big]\,dx \\ &= \int_0^1 \frac{d}{dx}(\frac{e^x}{x+1})\,dx = \frac{e^x}{x+1}\Big|_0^1 = \frac{e}{2} - 1\end{aligned}$$

7. (1) $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{t}{t^2+t+1}\,dt$, 回答下列問題，並作圖

(a) 此函數圖形遞減凹向下 (concave down) 的範圍在 ________

(b) 此函數圖形是否有漸近線？若有，請寫出漸近線方程式 ________

(c) 請作 $y = f(x)$ 的略圖。 《台大C》

(2) 積分 $\displaystyle\int_a^b (x^4 - 10x^2 + 9)\,dx$ 在 $a=$? $b=$? 時，其積分值最小。 《台大B》

《解》☞

(1) (a) 因 $f(x)=\int_0^x \frac{t}{t^2+t+1}\,dt$, 故

$$f'(x)=\frac{x}{x^2+x+1}$$

令 $f'(x)=0$, 可得 $x=0$, 再由

$$f''(x)=\frac{x^2+x+1-x(2x+1)}{(x^2+x+1)^2}=\frac{1-x^2}{(x^2+x+1)^2}=\frac{(1-x)(1+x)}{(x^2+x+1)^2}$$

令 $f''(x)=0$, 可得 $x=\pm 1$, $f(x)$ 的增減值表：

x		-1		0		1	
$f'(x)$	-	-	-	0	+	+	+
$f''(x)$	-	0	+	+	+	0	-
$f(x)$	$\searrow$	$\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	0.247	$\nearrow$

故函數圖形遞減凹向下的範圍爲 $(-\infty, -1)$ 。

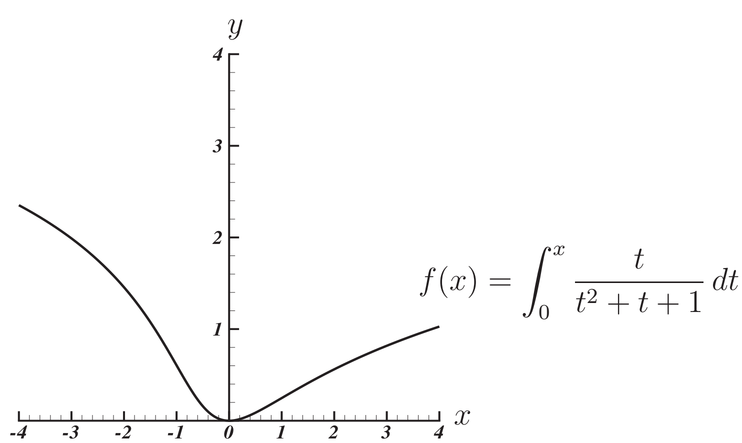
(b) 因

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\int_0^\infty \frac{t}{t^2+t+1}\,dt=\infty$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2+x+1}=0$$

故無漸近線 。

(c) 圖



(2) 設 $b>a$, 令

$$f(x)=x^4-10x^2+9=(x^2-9)(x^2-1)=(x-3)(x+3)(x-1)(x+1)$$

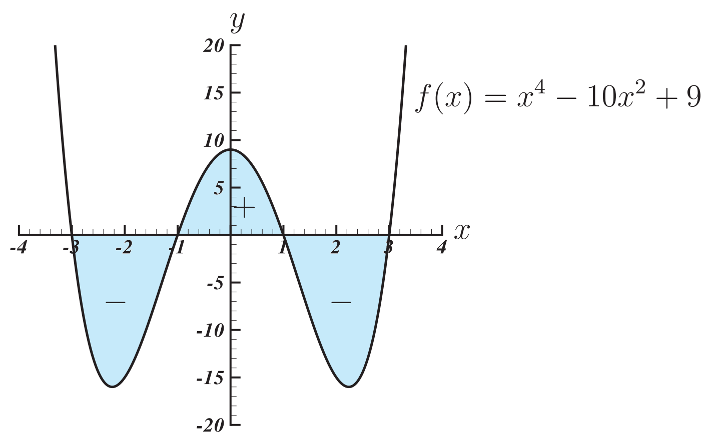
可得 $x=\pm 3$ 、$x=\pm 1$, 再由

$$f'(x)=4x^3-20x=0$$

可得 $x=0$ 、$\pm\sqrt{5}$, 且 $f(0)=9$, $f(\pm\sqrt{5})=-16$, 故

x		-3		$-\sqrt{5}$		-1		0		1		$\sqrt{5}$		3	
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\searrow$	-16	$\nearrow$	0	$\nearrow$	9	$\searrow$	0	$\searrow$	-16	$\nearrow$	0	$\nearrow$

則 $f(x)$ 的圖形如下



由圖形可知 $a=-3$ 、$b=3$ 時 , 積分值最小 。

8. 求 $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^{\sin x}\sqrt{\tan x}\,dx}{\int_0^{\tan x}\sqrt{\sin x}\,dx}=?$

《解》 ☞ 因 $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\int_0^{\sin x}\sqrt{\tan x}\,dx=0$ 且 $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\int_0^{\tan x}\sqrt{\sin x}\,dx=0$, 故

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^{\sin x}\sqrt{\tan x}\,dx}{\int_0^{\tan x}\sqrt{\sin x}\,dx} &= \lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{\tan(\sin x)}\cdot\cos x}{\sqrt{\sin(\tan x)}\cdot\sec^2 x}\\ &= \lim_{x\to 0^+}\left\{\left[\frac{\tan(\sin x)}{\sin(\tan x)}\right]^{1/2}\cdot\frac{\cos x}{\sec^2 x}\right\}\end{aligned}$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\left\{\left[\frac{\dfrac{\tan(\sin x)}{\sin x}\cdot\dfrac{\sin x}{x}}{\dfrac{\sin(\tan x)}{\tan x}\cdot\dfrac{\tan x}{x}}\right]^{1/2}\cdot\frac{\cos x}{\sec^2 x}\right\}$$

$$= 1$$

9. 設函數 $f(x)=\displaystyle\int_0^x 3^t\,dt$，試利用微分均值定理證明：存在一數 c，$0<c<1$，使得 $\displaystyle\int_0^1 3^t\,dt=3^c$。

《証》 ☞ 因 $f(x)=\displaystyle\int_0^x 3^t\,dt$ 由微分均值定理知，$\exists c\in(0,1)$，使得

$$f'(c)=\frac{f(1)-f(0)}{1-0}\ \Rightarrow\ 3^c=f(1)-0=\int_0^1 3^t\,dt$$

故 $\displaystyle\int_0^1 3^t\,dt=3^c$

10. (1) 假如 $x\sin\pi x=\displaystyle\int_0^{x^2} f(t)\,dt$, 其中 f 是一個連續函數，求 $f(4)=?$ 《政大財政》

(2) Suppose that $f(t)$ is a continuous function on $(1,\infty)$ satisfying

$\displaystyle\int_2^{1+x^2} f(t)\,dt=\ln x$, then $f(10)=?$ 《台大B》

《解》 ☞ (1) 因 $\dfrac{d}{dx}(x\sin\pi x)=\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_0^{x^2} f(t)\,dt$，可得

$$\sin\pi x+x\pi\cos\pi x=f(x^2)\cdot 2x$$

令 $x=2$ 代入上式可得，$\sin 2\pi+2\pi\cdot\cos 2\pi=f(4)\cdot 2\cdot 2$，故 $f(4)=\dfrac{\pi}{2}$。

(2) 因 $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_2^{(1+x^2)} f(t)\,dt=\dfrac{d}{dx}(\ln x)$，可得

$$f(1+x^2)\cdot 2x=\frac{1}{x}\ \text{即}\ f(1+x^2)=\frac{1}{2x^2}$$

令 $x=3$，故 $f(10)=\dfrac{1}{18}$。

11. 求下列積分

(a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x+\cos x}\,dx$ (b) $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^4+2x^2+2x+2}{x^3+2x}\,dx$ 《交大》

(c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{1-\sin x}\,dx$ (d) $\displaystyle\int_{-1}^0 \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx$

《解》 ☞ (a) 令 $z=\tan\frac{x}{2}$，故 $dx=\frac{2}{1+z^2}dz$、$\sin x=\frac{2z}{1+z^2}$、$\cos x=\frac{1-z^2}{1+z^2}$，且

x	0	$\frac{\pi}{2}$
z	0	1

，故

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x+\cos x}\,dx &= \int_0^1 \frac{1}{\frac{2z}{1+z^2}+\frac{1-z^2}{1+z^2}}\cdot\frac{2}{1+z^2}dz\\ &= \int_0^1 \frac{2}{2z+1-z^2}dz=\int_0^1\frac{2}{2-(z-1)^2}dz\\ &= \frac{2}{\sqrt{2}}\tanh^{-1}\frac{z-1}{\sqrt{2}}\Big|_0^1=-\frac{2}{\sqrt{2}}\tanh^{-1}\frac{-1}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

(b) 因

$$\begin{aligned}\frac{x^4+2x^2+2x+2}{x^3+2x} &= x+\frac{2x+2}{x(x^2+2)}=x+\frac{(2x+2)x}{x^2(x^2+2)}\\ &= x+\frac{x}{x^2}+\frac{-4+2x}{-2(x^2+2)}\\ &= x+\frac{1}{x}+\frac{-x+2}{x^2+2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\int_1^2 \frac{x^4+2x^2+2x+2}{x^3+2x}\,dx=\int_1^2\left[x+\frac{1}{x}+\frac{-x+2}{x^2+2}\right]dx\\ &= \int_1^2 x\,dx+\int_1^2\frac{1}{x}\,dx+\int_1^2\frac{-x}{x^2+2}\,dx+2\int_1^2\frac{1}{x^2+2}\,dx\\ &= \frac{x^2}{2}\Big|_1^2+\ln|x|\Big|_1^2-\frac{1}{2}\ln|x^2+2|\Big|_1^2+\frac{2}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{2}}\Big|_1^2\\ &= 2-\frac{1}{2}+\ln 2-\ln 1-\frac{1}{2}(\ln 6-\ln 3)+\frac{2}{\sqrt{2}}(\tan^{-1}\sqrt{2}-\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}})\\ &= \frac{3}{2}+\ln\sqrt{2}+\sqrt{2}(\tan^{-1}\sqrt{2}-\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}})\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{1-\sin x}dx &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{1-\sin x}\cdot\frac{1+\sin x}{1+\sin x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1+\sin x}{\cos^2 x}dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sec^2 x\,dx - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos^2 x}\,d\cos x \\
&= \tan x\,\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} + \frac{1}{\cos x}\,\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} \\
&= \sqrt{3}-0+(2-1) = \sqrt{3}+1
\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^0 \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx &= \int_{-1}^0 \sqrt{\frac{1+x}{1-x}\cdot\frac{1+x}{1+x}}dx = \int_{-1}^0 \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}dx \\
&= \int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx + \int_{-1}^0 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx \\
&= \sin^{-1} x\,\Big|_{-1}^0 - \sqrt{1-x^2}\,\Big|_{-1}^0 \\
&= \sin^{-1} 0 - \sin^{-1}(-1) - (1-0) = \frac{\pi}{2}-1
\end{aligned}$$

12. (1) 設 $f(x)=\int_\pi^x \sqrt{1+\cos^2 t}\,dt$，求 $(f^{-1})'(0)$ 。 《台綜大B》

(2) Let $F(x)=\int_{\frac{2}{x}}^{x+1} \sqrt{2t^2+t+3}\,dt$; $(x>0)$. Evaluate $F'(2)$ and $(F^{-1})'(0)$.

《解》 ☞

(1) 令 $y=f(x)=\int_\pi^x \sqrt{1+\cos^2 t}\,dt$，當 $y=0$ 時

$$0=\int_\pi^x \sqrt{1+\cos^2 t}\,dt$$

可解得 $x=\pi$，故

$$(f^{-1})'(0)=\frac{1}{\frac{df}{dx}\Big|_{x=\pi}} = \frac{1}{\left[\frac{d}{dx}\int_\pi^x \sqrt{1+\cos^2 t}\,dt\right]\Big|_{x=\pi}} = \frac{1}{\sqrt{1+\cos^2 x}\,\Big|_{x=\pi}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

(2)

$$\begin{aligned}
F'(x) &= \frac{d}{dx}\int_{\frac{2}{x}}^{x+1} \sqrt{2t^2+t+3}\,dt \\
&= \sqrt{2(x+1)^2+(x+1)+3} - \sqrt{2(\frac{2}{x})^2+\frac{2}{x}+3}\cdot(-\frac{2}{x^2})
\end{aligned}$$

故

$$F'(2) = \sqrt{24} - \sqrt{6} \cdot (-\frac{1}{2}) = \sqrt{24} + \frac{\sqrt{6}}{2}$$

令 $y = F(x) = \int_{\frac{2}{x}}^{x+1} \sqrt{2t^2+t+3}\ dt$，當 $y = 0$ 時

$$0 = \int_{\frac{2}{x}}^{x+1} \sqrt{2t^2+t+3}\ dt\ ;\ (x > 0)$$

可解得 $x = 1$，故 $(F^{-1})'(0) = \dfrac{1}{F'(1)} = \dfrac{1}{\sqrt{13}+2\sqrt{13}} = \dfrac{1}{3\sqrt{13}}$

13. 求下列積分

(a) $\int_{-2}^{2} |x^3 - 1|\ dx$ (b) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} |\sin x - \cos x|\ dx$

《解》 ☞ (a) 令 $x^3 - 1 = 0$，則 $(x-1)(x^2+x+1) = 0$，故 $x = 1$

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{2} |x^3-1|\ dx &= \int_{-2}^{1} (-x^3+1)\ dx + \int_{1}^{2} (x^3-1)\ dx \\ &= (-\frac{x^4}{4}+x)\Big|_{-2}^{1} + (\frac{x^4}{4}-x)\Big|_{1}^{2} \\ &= -\frac{1}{4}+1-(-4-2)+4-2-(\frac{1}{4}-1) = \frac{19}{2}\end{aligned}$$

(b) 令 $\sin x - \cos x = 0$，故 $\dfrac{\sin x}{\cos x} = 1$，可解得 $x = \dfrac{\pi}{4}$

$$\begin{aligned}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} |\sin x - \cos x|\ dx &= \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} (-\sin x + \cos x)\ dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - \cos x)\ dx \\ &= (\cos x + \sin x)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{4}} + (-\cos x - \sin x)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= (\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}) - (1+0) + (0-1) - (-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}) \\ &= 2\sqrt{2}-2\end{aligned}$$

14. 求下列積分

(a) $\int_{-1}^{2} \lfloor x \rfloor\ dx$ (b) $\int_{\frac{1}{4}}^{1} \lfloor \frac{1}{x} \rfloor\ dx$ (c) $\int_{0}^{2} \lfloor 2x \rfloor\ dx$ (d) $\int_{0}^{2} \lfloor x^2 \rfloor\ dx$

《解》 ☞ (a)

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{2}\lfloor x\rfloor\,dx &= \int_{-1}^{0}(-1)dx+\int_{0}^{1}0\,dx+\int_{1}^{2}1\,dx\\ &= -x\Big|_{-1}^{0}+0+x\Big|_{1}^{2}=0-1+2-1=0\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{4}}^{1}\lfloor\frac{1}{x}\rfloor\,dx &= \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{3}}3\,dx+\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}}2\,dx+\int_{\frac{1}{2}}^{1}1\,dx\\ &= 3x\Big|_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{3}}+2x\Big|_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}}+x\Big|_{\frac{1}{2}}^{1}=\frac{13}{12}\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}\int_{0}^{2}\lfloor 2x\rfloor\,dx &= \int_{0}^{\frac{1}{2}}0\,dx+\int_{\frac{1}{2}}^{1}1\,dx+\int_{1}^{\frac{3}{2}}2\,dx+\int_{\frac{3}{2}}^{2}3\,dx\\ &= 0+x\Big|_{\frac{1}{2}}^{1}+2x\Big|_{1}^{\frac{3}{2}}+3x\Big|_{\frac{3}{2}}^{2}=3\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}\int_{0}^{2}\lfloor x^2\rfloor\,dx &= \int_{0}^{1}0\,dx+\int_{1}^{\sqrt{2}}1\,dx+\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}}2\,dx+\int_{\sqrt{3}}^{2}3\,dx\\ &= 0+x\Big|_{1}^{\sqrt{2}}+2x\Big|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}}+3x\Big|_{\sqrt{3}}^{2}\\ &= 5-\sqrt{2}-\sqrt{3}\end{aligned}$$

15. 求 $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\min\{\frac{3}{2\pi}x\,,\,\cos x\}\,dx$

《解》 ☞ 令 $\frac{3}{2\pi}x-\cos x=0$，故 $x=\frac{\pi}{3}$，且 $0<x<\frac{\pi}{3}$ 時，$\frac{3}{2\pi}x<\cos x$，則

$$\begin{aligned}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\min\{\frac{3}{2\pi}x\,,\,\cos x\}\,dx &= \int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\frac{3}{2\pi}x\,dx+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx\\ &= \frac{3}{4\pi}x^2\Big|_{0}^{\frac{\pi}{3}}+\sin x\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\\ &= \frac{3}{4\pi}\cdot\frac{\pi^2}{9}-0+1-\frac{\sqrt{3}}{2}\\ &= \frac{\pi}{12}+1-\frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

16. Evaluate $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin x}\ dx.$ 《台聯A2》

《解》 ☞

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin x}\ dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x - 2\sin\frac{x}{2}\ \cos\frac{x}{2}}\ dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2})^2}\ dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}|\ dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2})\, dx = (\,2\sin\frac{x}{2} + 2\cos\frac{x}{2}\,)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= (\,\sqrt{2} + \sqrt{2} - 2\,) = 2(\sqrt{2}-1)
\end{aligned}$$

17. 求 $\int_2^{17} \frac{dx}{\sqrt{\sqrt{x-1} + (x-1)^{5/4}}}$

《解》 ☞ 令 $t = (x-1)^{\frac{1}{4}}$，故 $x - 1 = t^4$，則 $dx = 4t^3\ dt$，且 $\begin{array}{c|c|c} x & 2 & 17 \\ \hline t & 1 & 2 \end{array}$，則

$$\int_2^{17} \frac{dx}{\sqrt{\sqrt{x-1} + (x-1)^{5/4}}} = \int_1^2 \frac{4t^3 dt}{\sqrt{t^2 + t^5}} = \int_1^2 \frac{4t^2}{\sqrt{1+t^3}}\ dt$$

再令 $1 + t^3 = u^2$，故 $3t^2\ dt = 2u\ du$，且 $\begin{array}{c|c|c} t & 1 & 2 \\ \hline u & \sqrt{2} & 3 \end{array}$，故

$$\begin{aligned}
\int_2^{17} \frac{dx}{\sqrt{\sqrt{x-1} + (x-1)^{5/4}}} &= \int_1^2 \frac{4t^2}{\sqrt{1+t^3}}\ dt \\
&= \int_{\sqrt{2}}^3 \frac{\frac{4}{3}\cdot 2udu}{u} \\
&= = \frac{8}{3}\int_{\sqrt{2}}^3 du = \frac{8}{3}u\ \Big|_{\sqrt{2}}^3 \\
&= \frac{8}{3}(3-\sqrt{2})
\end{aligned}$$

18. (a) 試證 $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^c}{(1+x^c)(1+x^2)}\,dx = \int_0^{\infty} \frac{1}{(1+x^c)(1+x^2)}\,dx$

(b) 由 (a) 求 $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^c}{(1+x^c)(1+x^2)}\,dx$ 之值。

《解》 ☞ (a) 令 $x = \dfrac{1}{t}$，故 $dx = -\dfrac{1}{t^2}\,dt$，且 $\begin{array}{c|c|c} x & 0 & \infty \\ \hline t & \infty & 0 \end{array}$

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} \frac{x^c}{(1+x^c)(1+x^2)}\,dx &= \int_{\infty}^{0} \frac{\frac{1}{t^c}}{(1+\frac{1}{t^c})(1+\frac{1}{t^2})} \cdot (-\frac{1}{t^2})\,dt \\ &= \int_0^{\infty} \frac{1}{(t^c+1)(t^2+1)}\,dt \\ &= \int_0^{\infty} \frac{1}{(1+x^c)(1+x^2)}\,dx\end{aligned}$$

(b) 令

$$I = \int_0^{\infty} \frac{x^c}{(1+x^c)(1+x^2)}\,dx \qquad (1)$$

$$I = \int_0^{\infty} \frac{1}{(1+x^c)(1+x^2)}\,dx \qquad (2)$$

(1) 式 + (2) 式，可得

$$2I = \int_0^{\infty} \frac{1+x^c}{(1+x^c)(1+x^2)}dx = \int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2}dx = \tan^{-1} x \Big|_0^{\infty} = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$$

故

$$\int_0^{\infty} \frac{x^c}{(1+x^c)(1+x^2)}dx = \frac{\pi}{4}$$

本題之 (b) 小題亦可直接令 $x = \tan\theta$ 解之。

19. 求 $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{1+\tan^4 x}dx$ 之值。

《提示》 ➥：六個三角函數，在四個象限中的函數值的絕對值，重複四次，sin 的值在一、二象限爲正，cos 的值在一、四象限爲正，tan 的值在一、三象限爲正。

《解》☞ 因

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1+\tan^4 x}\ dx = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\tan^4 x}\ dx = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^4 x}{\cos^4 x+\sin^4 x}\ dx$$

令

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{1+\tan^4 x}\ dx = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^4 x}{\cos^4 x+\sin^4 x}\ dx \tag{1}$$

故

$$\begin{aligned} 2I &= I+I = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^4 x}{\cos^4 x+\sin^4 x}\ dx + 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 x}{\sin^4 x+\cos^4 x}\ dx \\ &= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^4 x+\sin^4 x}{\cos^4 x+\sin^4 x}\ dx = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ dx = 4x\ \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\pi \end{aligned}$$

因此 $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{1+\tan^4 x} dx = \pi$

20. 求 $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{8+\sin^2 x}\ dx$ 《中興土木》

《解》☞

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{8+\sin^2 x}\ dx &= \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{8+\sin^2 x}\ dx = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{8+1-\cos^2 x}\ dx \\ &\quad (\text{令 } u=\cos x\text{，則 } du = -\sin x\, dx\ ) \\ &= \pi\int_1^0 \frac{1}{9-u^2}(-du) = \pi\int_0^1 \frac{1}{9-u^2}\ du \\ &= \pi\int_0^1 -\frac{1}{(u-3)(u+3)}\ du = \frac{\pi}{6}(\ln|u+3| - \ln|u-3|) \\ &= \frac{\pi}{6}\ln\left|\frac{u+3}{u-3}\right|\ \Big|_0^1 = \frac{\pi}{6}\ln 2 \end{aligned}$$

21. 求 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x}{\sin x+\cos x}\ dx$

《解》☞ 設 $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x}{\sin x+\cos x}\ dx$，故

$$\begin{aligned} 2I &= I+I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x}{\sin x+\cos x}\ dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{\cos x+\sin x}\ dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x+\cos^3 x}{\sin x+\cos x}\ dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 x - \sin x\cos x + \cos^2 x)dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\frac{1}{2}\sin 2x)\ dx = (x+\frac{1}{4}\cos 2x)\ \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

故 $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x}{\sin x + \cos x} dx = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}$

22. (a) $\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{1}{5+4\cos\theta}\, d\theta$ (b) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \frac{1}{3+\sin^2 x}\, dx$ 《台大A》

《解》 ☞ (a) 令 $z = \tan\frac{\theta}{2}$，$\cos\theta = \frac{1-z^2}{1+z^2}$，$d\theta = \frac{2}{1+z^2}dz$，

x	0	$\frac{2\pi}{3}$
z	0	$\sqrt{3}$

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{1}{5+4\cos\theta}\, d\theta &= \int_0^{\sqrt{3}} \frac{\frac{2}{1+z^2}}{5+4\cdot\frac{1-z^2}{1+z^2}}\, dz = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{2}{5(1+z^2)+4(1-z^2)}\, dz \\ &= \int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{9+z^2}\, dz = \frac{1}{3}\tan^{-1}\frac{z}{3}\Big|_0^{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{9}\end{aligned}$$

(b) 若 $a-b=\pi$，則 $\int_a^b f(\sin^2 x)\, dx = \int_0^{\pi} f(\sin^2 x)\, dx$，故

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \frac{1}{3+\sin^2 x}\, dx = \int_0^{\pi} \frac{1}{3+\sin^2 x}\, dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3+\sin^2 x}\, dx \qquad (1)$$

令 $z = \tan x$，故 $\sin^2 x = \frac{z^2}{1+z^2}$、$dx = \frac{1}{1+z^2}$，且

x	0	$\frac{\pi}{2}$
z	0	∞

，代回 (1) 式

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \frac{1}{3+\sin^2 x}\, dx &= 2\int_0^{\infty} \frac{1}{3+\frac{z^2}{1+z^2}}\cdot\frac{1}{1+z^2}\, dz \\ &= 2\int_0^{\infty} \frac{1}{4z^2+3}\, dz = \frac{2}{4}\int_0^{\infty} \frac{1}{z^2+\frac{3}{4}}\, dz \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\cdot\tan^{-1}\left(\frac{z}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

23. Let $F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$ and we know that $F(\infty) = 1$. Suppose G is the inverse function of F. Find $G'(0.5)$ where $G'(x) = \frac{dG(x)}{dx}$. 《中興B組》

《解》☞ 因 $e^{-\frac{t^2}{2}}$ 爲偶函數，故

$$y = 0.5 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$$

可解得 $x = 0$, 因此 $G'(0.5) = \dfrac{1}{\left.\dfrac{dF}{dx}\right|_{x=0}} = \dfrac{1}{\left.\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\right|_{x=0}} = \sqrt{2\pi}$

24. Suppose f'' is continuous on $[0\,,\,1]$, $f(1) = 2$, $f'(1) = 2$ and the average value of f on $[0\,,\,1]$ is 2 . Evaluate $\displaystyle\int_0^1 x^2 f''(x)\, dx$. 《台聯大A2》

《解》☞ 因 $f(x)$ 在 $[0\,,\,1]$ 中的平均值 $f(c) = 2$，故

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x^2 f''(x)\, dx &= = \Big[x^2 f'(x) - 2x f(x) \Big] \Big|_0^1 + 2 \int_0^1 f(x)\, dx \\
&= f'(1) - 2f(1) + 2f(c) \cdot (1 - 0) \\
&= 2 - 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 = 2
\end{aligned}$$

25. Suppose that x and y are related by the equation $x = \displaystyle\int_0^y \frac{1}{\sqrt{1+4t^2}}\, dt$. Show that $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ is proportional to y and find the constant of proportionality. 《台聯A3 - 7》

《解》☞ 因 $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{\sqrt{1+4y^2}}$，故

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\dfrac{dx}{dy}} = \sqrt{1+4y^2}$$

則

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{8y\dfrac{dy}{dx}}{2\sqrt{1+4y^2}} = \frac{4y\sqrt{1+4y^2}}{\sqrt{1+4y^2}} = 4y$$

因此比例常數爲 4 。