序

數學是所有科學之母, 洩漏天機的語言，微積分這一門學問, 它是僅次於歐氏幾何為數學上最偉大的成就之一, 也是近代所有理工商等學門的基礎學科，因此是研讀理工商的同學必修的一門課程，但是因為它的理論艱澀繁瑣, 枯燥難學，所以是很多莘莘學子在學習上的一大夢魘。因此喻超凡老師秉著服務同學的初衷，參考國內外著名之微積分叢書，以及在國立大學及全國各大補習班任教的教學心得，提綱挈領的將重點及觀念，以結構化的方式放在每一章節的開始，並於每一章節的精選範例中，加入重要的題型做整體而詳細的思路分析和講解說明，精編細撰出這本"翻轉微積分"，期能幫助想藉由翻轉學習的同學, 在短時間內能對微積分有全盤性的認識及了解，進而讓同學翻轉成績, 翻轉未來。

輔助學習微積分常用的電腦軟體有 GeoGebra，這是一套開源軟體, 官方網站為 https://www.geogebra.org/，及 Wolfram Mathematica，官方網站為 https://www.wolfram.com/mathematica/，同學可以安裝在電腦或手機中, 這兩套軟體對於初學微積分的同學, 是一個非常實用而且重要的工具。

本書手稿雖經多次修訂及校對, 但仍難免有所疏漏之處, 敬請各位老師和同學不吝賜教，網址為 http://www.superyu.idv.tw。

數學 電腦軟體

喻超凡YouTube

喻超凡

2023. 6.

喻超凡老師的家

超凡小鋪網址: https://mall.iopenmall.tw/059897/index.php

iOPEN Mall 超凡小鋪　　蝦皮超凡小鋪

喻超凡喻超弘 YouTube：https://YouTube.com/@supyu

喻超凡*Instagram*　　喻超凡YouTube

喻超凡雲端翻轉數學教室：https://www.superyu.idv.tw

喻超凡 Facebook　　喻超凡雲端教室

目錄

1 函數的極限與連續 **1**

1.1 **極限** (Limit) 1

1.1.1 極限的直覺意義 1

1.1.2 極限的基本定理 1

1.1.3 運算子 ∞ (operator infinity) 2

1.1.4 極限的直覺求法 3

1.1.5 L'Hôpital Rule(羅必達法則) 初論 4

1.2 **特殊函數極限** 22

1.2.1 夾擠定理(The Squeeze Theorem or The Sandwich Theorem) 22

1.2.2 最大整數函數 $\lfloor x \rfloor$ (Greatest Integer Function or Integer Floor Function) 22

1.2.3 其他特殊函數 23

1.3 ϵ、δ **的極限定義** 42

1.3.1 概論 42

1.3.2 定義 43

1.3.3 極限的証明 43

1.4 **連續** 59

1.4.1 定義 59

1.4.2 基本性質 59

1.5 **連續的重要定理** 70

1.5.1 勘根定理(Bolzano 定理) 70

1.5.2 介值定理(The Intermediate Value Theorem) 70

1.5.3 極值定理(Extreme Value Theorem) 71

2 導數及其應用 **75**

2.1 **導數**(Derivative) 75

2.1.1 導數的定義 75

2.1.2 常見函數的導數 77

2.2 **導數的基本運算** 93

2.2.1 四則運算 93
2.2.2 鏈微法則(Chain Rule) 94
2.2.3 反函數(Inverse Function) 之導數 95
2.2.4 參數方程式(Parametric Equation) 之導數 96
2.3 **隱函數**(Implicit Function) **的導數及高階導數** 129
2.3.1 隱函數的導數 129
2.3.2 高階導數 130
2.4 **微分均值定理** 153
2.4.1 洛爾定理 (Rolle's Theorem) 153
2.4.2 Lagrange 微分均值定理 (The Mean Value Theorem) 153
2.4.3 柯西均值定理 (Cauchy Mean Value Theorem) 154
2.5 L'Hôpital Rule 165
2.5.1 L'Hôpital Rule 165
2.5.2 利用 Taylor's 級數展開求極限值 167
2.6 **函數的極值及不等式的証明** 193
2.6.1 單調函數(Monotonic Function) 193
2.6.2 函數的極值 195
2.6.3 不等式的証明 196
2.7 **函數與方程式圖形的描繪** 261
2.7.1 函數圖形的描繪 261
2.7.2 方程式圖形的描繪 266
2.8 **導數的應用** 347
2.8.1 曲線的切線(Tangent Line) 及法線 (Normal Line) 347
2.8.2 相對變率 348
2.8.3 方程式的根 348
2.8.4 函數的微分量(Differential) 與近似值 350

3 不定積分(Indefinite Integral) 387
3.1 **定義** 387
3.1.1 反導數(Antiderivative) 387
3.1.2 不定積分(Indefinite Integral) 的定義 387
3.2 **不定積分的基本性質** 388
3.2.1 基本性質 388
3.2.2 常見函數的不定積分 388
3.3 **代換積分法**(The Substitution Method) 394
3.3.1 合成函數(Composite Function) 的積分法 394
3.3.2 三角函數代換積分法(Trigonometric Substitutions) 394

3.3.3 $\sin x$ 與 $\cos x$ 有理函數的積分 395
3.4 **部分積分法**(Integration by Parts) 439
3.5 **三角函數的積分**(Trigonometric Integrals) 469
3.6 **分式與根式函數** 493
3.6.1 部分分式的理論 493
3.6.2 部分分式題型分析 496
3.6.3 分式積分法 497
3.6.4 根式積分法 498
3.7 **一階微分方程式** 546
3.7.1 基本定義 546
3.7.2 一階微分方程式常用的解題方法 547

第 1 章 函數的極限與連續

1.1 極限 (Limit)

1.1.1 極限的直覺意義

1. 定義

設函數 $f(x)$ 在 x 趨近 a 時，函數值 $f(x)$ 亦趨近 ℓ，則稱函數 $f(x)$ 在點 a 的極限爲 ℓ，表示成 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ 。

2. 觀念分析

(1) 兩個實數之間，必存在第三個實數，稱爲實數系具有稠密性 。

(2) 由實數的稠密性可知，數線上某一點 a 的鄰近區域中，包含了無窮多個點 。

(3) 函數的極限乃是探討數線上某一點 a 鄰近區域中之無限個點函數值分佈的情況 。

(a) 極限值爲該無限個點函數值的 共同趨勢或一致結論 。

(b) 極限值爲概估值 。

(c) 函數值爲正確值 。

(4) 若 $\lim\limits_{\substack{x\to a \\ (x\neq a)}} f(x) = \ell$，若且唯若 $\lim\limits_{\substack{x\to a^+ \\ (x>a)}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to a^- \\ (x<a)}} f(x) = \ell$ 。

1.1.2 極限的基本定理

設 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ 、$\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$ 且 A 、$B \in \mathbb{R}$

1. $\lim\limits_{x\to a} k\, f(x) = k \lim\limits_{x\to a} f(x) = kA$； $k \in \mathbb{R}$

2. $\lim\limits_{x \to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) \pm \lim\limits_{x \to a} g(x) = A \pm B$

3. $\lim\limits_{x \to a}[f(x) \cdot g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to a} g(x) = A \cdot B$

4. $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)} = \dfrac{A}{B}$; $(B \neq 0)$

5. $\lim\limits_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x \to a} f(x)} = \sqrt[n]{A}$; $\sqrt[n]{A} \in \mathbb{R}$

6. 設 $f(x) = A$ (常數) , 則 $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$

1.1.3 運算子 ∞ (operator infinity)

1. ∞ 的基本運算

(1) $c \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; \infty \pm c = \infty$

(2) $\infty + \infty = \infty$

(3) $c > 0 \;\Rightarrow\; \infty \cdot c = \infty$; $c < 0 \;\Rightarrow\; \infty \cdot c = -\infty$; $\infty \cdot \infty = \infty$

(4) $c > 0 \;\Rightarrow\; \infty^c = \infty$; $c < 0 \;\Rightarrow\; \infty^c = 0$

(5) $\dfrac{1}{\pm\infty} = 0$

(6) $\dfrac{1}{0^+} = +\infty$; $\dfrac{1}{0^-} = -\infty$

2. ∞ 的不定型 (Indeterminate form) : (下面的 0 與 1 , 爲近似的 0 與 1)

(1) $0 \cdot \infty = 0 \cdot \dfrac{1}{0^+} = \dfrac{1}{\pm\infty} \cdot \infty$; (故 $\dfrac{0}{0}$, $\dfrac{\infty}{\infty}$ 亦爲不定型)

(2) $\infty - \infty$

(3) $(0^+)^0 = e^{0 \cdot \ln 0^+} = e^{0 \cdot (-\infty)}$; ($\because \ln 0^+ = \log_e 0^+ \to -\infty$)

$\infty^0 = e^{0 \cdot \ln \infty} = e^{0 \cdot \infty}$; ($\because \ln \infty = \log_e \infty \to \infty$)

$1^\infty = e^{\infty \cdot \ln 1} = e^{\infty \cdot 0}$; ($\because \ln 1 = \log_e 1 = 0$)

1.1.4 極限的直覺求法

1. 連續型 (直接代入法)

(1) 多項式：

$$\lim_{x\to b}(a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0)=a_nb^n+a_{n-1}b^{n-1}+\cdots+a_1b+a_0$$

(2) 分式：(分母不爲零)

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(a)}{g(a)} \quad ; \quad (g(a)\neq 0)$$

2. $\dfrac{0}{0}$ 型

(1) 觀念分析

(a) 函數的分子及分母有一次或一次重因式之公因式時，則表示函數在該處爲不連續點。

(b) 消去一次或一次重因式之公因式，則表示將函數的不連續點變成連續點。

(c) $\forall\ x\neq a$, $f(x)=g(x)$，則 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)$。

(2) 分式型：分子與分母因式分解後，消去公因式，再以代入法求出極限值。

(3) 根式型：有理化後，消去公因式，再以代入法求出極限值。

常用的有理化公式如下：

(a) $\sqrt{a}-\sqrt{b}=\dfrac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

(b) $\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}=\dfrac{a-b}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}$

(c) $\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}=\dfrac{a-b}{(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}$

(d) $a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})$

3. $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型

(1) 分式型與根式型：提出分子與分母最高次因式，再以代入法求出極限值。

(a) 函數分子最高次因式的次數大於分母，則極限值爲 $\pm\infty$。

(b) 函數分子最高次因式的次數等於分母, 則極限值爲分子與分母最高次因式的係數比值

(c) 函數分子最高次因式的次數小於分母，則極限值爲 0。

(2) 指數型：同除最大底 (最小底) 之指數函數，再以代入法求出極限值。

4. $\infty-\infty$ 型

(1) 分式型：通分化簡。

(2) 根式型：有理化。

(3) 對數型：合併相同底的項。

1.1.5 L'Hôpital Rule (羅必達法則) 初論

本節爲 L'Hôpital Rule 初論，是給已經有學習過微分理論的同學先修的，有關 L'Hôpital Rule 的完整理論，將在第 165 頁 2.5 節中討論，倘若同學尚未學習過微分理論，本節可先行忽略。

1. 設 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$，且在包含 a 的開區間中 $g'(x)\neq 0$，

若 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\ell$ (ℓ 爲存在的實數或 $\pm\infty$)，則 $\boxed{\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\ell}$。

2. 設 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\pm\infty$，$\lim\limits_{x\to a} g(x)=\pm\infty$，且在包含 a 的開區間中 $g'(x)\neq 0$，

若 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\ell$ (ℓ 爲存在的實數或 $\pm\infty$)，則 $\boxed{\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\ell}$。

---

*Guillaume Francois Antoine Marquis de L'Hôpital(1661∼1704) 法國數學家。此一法則是 Johann Bernoulli(July 1667∼Jan 1748) 首先發現的, 當時 L'Hôpital 正花錢請 Bernoulli 教授他微積分，因此 Bernoulli 就用 L'Hôpital 來命名。L'Hôpital 正確的法國發音爲 Low-pee-tall (French: [lopital])。

精選範例

1. 探討 $f_1(x)=x+2$、$f_2(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$，兩函數於 $x=2$ 之極限。

《解》 ☞

x	1.9	1.99	1.999	$\cdots 2 \cdots$	2.001	2.01	2.1
$f_1(x)$	3.9	3.99	3.999	$\cdots 4 \cdots$	4.001	4.01	4.1
$f_2(x)$	3.9	3.99	3.999	$\cdots \times \cdots$	4.001	4.01	4.1

因此由定義可得 $\lim\limits_{x\to 2} f_1(x)=4=f_1(2)$ 、 $\lim\limits_{x\to 2} f_2(x)=4\neq f_2(2)$

2. 求下列極限 《台大》

(a) $\lim\limits_{x\to -3}\sqrt{\dfrac{3x^2+1}{x+4}}$ (b) $\lim\limits_{x\to 8}\sqrt{3x-2+\sqrt{x+1}}$

《提示》 ➥ 直接代入法

《解》 ☞

(a) $\lim\limits_{x\to -3}\sqrt{\dfrac{3x^2+1}{x+4}}=\sqrt{\dfrac{27+1}{-3+4}}=\sqrt{28}$

(b) $\lim\limits_{x\to 8}\sqrt{3x-2+\sqrt{x+1}}=\sqrt{24-2+\sqrt{8+1}}=5$

3. If $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{f(x)}{x^2}=2$, find the limit : $\lim\limits_{x\to -2}\left[f(x)+\dfrac{f(x)}{x}\right]$. 《台聯A2》

《解》☞ 因

$$\lim_{x\to -2}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to -2}\left[f(x)\cdot\frac{1}{x^2}\right]=\lim_{x\to -2}f(x)\cdot\lim_{x\to -2}\frac{1}{x^2}=\lim_{x\to -2}f(x)\cdot\frac{1}{4}=2$$

故 $\lim\limits_{x\to -2}f(x)=8$, 因此

$$\lim_{x\to -2}\left[f(x)+\frac{f(x)}{x}\right]=8+\frac{8}{-2}=4$$

4. 求 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-6}{x^2-4}$

《提示》➥ $\dfrac{0}{0}$ 分式型

《解》☞ $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-6}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x+3)}{(x-2)(x+2)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+3}{x+2}=\dfrac{5}{4}$

5. Find $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^3+x^2-3}{3x^3-4x+1}$

《提示》➥ $\dfrac{0}{0}$ 分式型

《解》☞ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^3+x^2-3}{3x^3-4x+1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(2x^2+3x+3)}{(x-1)(3x^2+3x-1)}=\dfrac{8}{5}$

6. 求 $\lim\limits_{t\to 2}\dfrac{\sqrt{1+\sqrt{2+t}}-\sqrt{3}}{t-2}$ 《台大》

《提示》➥ $\dfrac{0}{0}$ 根式型

《解》☞

$$\lim_{t\to 2}\frac{\sqrt{1+\sqrt{2+t}}-\sqrt{3}}{t-2}=\lim_{t\to 2}\frac{(\sqrt{1+\sqrt{2+t}}-\sqrt{3})(\sqrt{1+\sqrt{2+t}}+\sqrt{3})}{(t-2)(\sqrt{1+\sqrt{2+t}}+\sqrt{3})}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{t\to 2} \frac{(\sqrt{2+t}-2)}{(t-2)(\sqrt{1+\sqrt{2+t}}+\sqrt{3})} \\
&= \lim_{t\to 2} \frac{(\sqrt{2+t}-2)(\sqrt{2+t}+2)}{(t-2)(\sqrt{1+\sqrt{2+t}}+\sqrt{3})(\sqrt{2+t}+2)} \\
&= \lim_{t\to 2} \frac{t-2}{(t-2)(\sqrt{1+\sqrt{2+t}}+\sqrt{3})(\sqrt{2+t}+2)} \\
&= \lim_{t\to 2} \frac{1}{(\sqrt{1+\sqrt{2+t}}+\sqrt{3})(\sqrt{2+t}+2)} \\
&= \frac{1}{8\sqrt{3}}
\end{aligned}
$$

7. 求下列極限

(a) $\lim\limits_{t\to 1} \dfrac{\sqrt{4t+5}-3}{\sqrt{t+3}-2}$　　(b) $\lim\limits_{t\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{t}-1}{t-1}$

《提示》 ➥ $\dfrac{0}{0}$ 根式型

《解》 ☞

(a)

$$
\begin{aligned}
\lim_{t\to 1} \frac{\sqrt{4t+5}-3}{\sqrt{t+3}-2} &= \lim_{t\to 1} \frac{\sqrt{4t+5}-3}{\sqrt{t+3}-2} \cdot \frac{\sqrt{4t+5}+3}{\sqrt{4t+5}+3} \cdot \frac{\sqrt{t+3}+2}{\sqrt{t+3}+2} \\
&= \lim_{t\to 1} \frac{4(t-1)(\sqrt{t+3}+2)}{(t-1)(\sqrt{4t+5}+3)} \\
&= \lim_{t\to 1} \frac{4(\sqrt{t+3}+2)}{\sqrt{4t+5}+3} = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}
\end{aligned}
$$

(b)

$$
\begin{aligned}
\lim_{t\to 1} \frac{\sqrt[3]{t}-1}{t-1} &= \lim_{t\to 1} \frac{\sqrt[3]{t}-1}{t-1} \cdot \frac{\sqrt[3]{t^2}+\sqrt[3]{t}+1}{\sqrt[3]{t^2}+\sqrt[3]{t}+1} \\
&= \lim_{t\to 1} \frac{t-1}{(t-1)(\sqrt[3]{t^2}+\sqrt[3]{t}+1)} \\
&= \lim_{t\to 1} \frac{1}{\sqrt[3]{t^2}+\sqrt[3]{t}+1} \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

8. 求 $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{1+3x}-\sqrt{1-2x}}{x+x^2}$

《提示》 ➥ $\frac{0}{0}$ 根式型

《解》 ☞

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{1+3x}-\sqrt{1-2x}}{x+x^2}\\
&=\lim_{x\to0}\Big[\frac{\sqrt[3]{1+3x}-1}{x(1+x)}-\frac{\sqrt{1-2x}-1}{x(1+x)}\Big]\\
&=\lim_{x\to0}\Big[\frac{(\sqrt[3]{1+3x}-1)(\sqrt[3]{(1+3x)^2}+\sqrt[3]{1+3x}+1)}{x(1+x)(\sqrt[3]{(1+3x)^2}+\sqrt[3]{1+3x}+1)}\\
&\qquad-\frac{(\sqrt{1-2x}-1)(\sqrt{1-2x}+1)}{x(1+x)(\sqrt{1-2x}+1)}\Big]\\
&=\lim_{x\to0}\Big[\frac{1+3x-1}{x(1+x)(\sqrt[3]{(1+3x)^2}+\sqrt[3]{1+3x}+1)}-\frac{1-2x-1}{x(1+x)(\sqrt{1-2x}+1)}\Big]\\
&=\lim_{x\to0}\Big[\frac{3}{(1+x)(\sqrt[3]{(1+3x)^2}+\sqrt[3]{1+3x}+1)}-\frac{-2}{(1+x)(\sqrt{1-2x}+1)}\Big]\\
&=\frac{3}{3}-(-\frac{2}{2})=2
\end{aligned}$$

9. 求下列極限

(a) $\lim_{t\to2}\frac{\sqrt{t+7}-3}{\sqrt{t+2}-2}$

(b) $\lim_{t\to0}\frac{\sqrt{t^3+1}-\sqrt{t^2+1}}{t}$

(c) $\lim_{t\to0}\frac{\sqrt[3]{8+t+t^3}-\sqrt[3]{8+t}}{\sqrt[3]{8+t}-\sqrt[3]{8+t^3}}$

(d) $\lim_{t\to27}\frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{t}}-2}{t-27}$

《提示》 ➥ $\frac{0}{0}$ 根式型

《解》 ☞

(a)

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 2}\frac{\sqrt{t+7}-3}{\sqrt{t+2}-2} &= \lim_{t\to 2}\frac{(\sqrt{t+7}-3)(\sqrt{t+7}+3)(\sqrt{t+2}+2)}{(\sqrt{t+2}-2)(\sqrt{t+7}+3)(\sqrt{t+2}+2)}\\
&= \lim_{t\to 2}\frac{(t-2)(\sqrt{t+2}+2)}{(t-2)(\sqrt{t+7}+3)}\\
&= \lim_{t\to 2}\frac{\sqrt{t+2}+2}{\sqrt{t+7}+3}\\
&= \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

(b) $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{t^3+1}-\sqrt{t^2+1}}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{t(t^2-t)}{t(\sqrt{t^3+1}+\sqrt{t^2+1})}=\frac{0}{2}=0$

(c) $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt[3]{8+t+t^3}-\sqrt[3]{8+t}}{\sqrt[3]{8+t}-\sqrt[3]{8+t^3}}$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{(\sqrt[3]{8+t+t^3}-\sqrt[3]{8+t})(\sqrt[3]{(8+t)^2}+\sqrt[3]{(8+t)(8+t^3)}+\sqrt[3]{(8+t^3)^2})}{(\sqrt[3]{8+t}-\sqrt[3]{8+t^3})(\sqrt[3]{(8+t)^2}+\sqrt[3]{(8+t)(8+t^3)}+\sqrt[3]{(8+t^3)^2})}$$

$$\cdot\frac{(\sqrt[3]{(8+t+t^3)^2}+\sqrt[3]{(8+t+t^3)(8+t)}+\sqrt[3]{(8+t)^2})}{(\sqrt[3]{(8+t+t^3)^2}+\sqrt[3]{(8+t+t^3)(8+t)}+\sqrt[3]{(8+t)^2})}$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{t^3(\sqrt[3]{(8+t)^2}+\sqrt[3]{(8+t)(8+t^3)}+\sqrt[3]{(8+t^3)^2})}{t(1-t)(1+t)(\sqrt[3]{(8+t+t^3)^2}+\sqrt[3]{(8+t+t^3)(8+t)}+\sqrt[3]{(8+t)^2})}$$

$$= 0$$

(d)

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 27}\frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{t}}-2}{t-27} &= \lim_{t\to 27}\frac{(\sqrt[3]{t}-3)(\sqrt[3]{t^2}+3\sqrt[3]{t}+9)}{(t-27)(\sqrt{1+\sqrt[3]{t}}+2)(\sqrt[3]{t^2}+3\sqrt[3]{t}+9)}\\
&= \lim_{t\to 27}\frac{t-27}{(t-27)(\sqrt{1+\sqrt[3]{t}}+2)(\sqrt[3]{t^2}+3\sqrt[3]{t}+9)}\\
&= \frac{1}{108}
\end{aligned}$$

10. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+x+1}{4x^2}$

《提示》 ➥ $\dfrac{\infty}{\infty}$ 分式型

《解》☞ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+x+1}{4x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2\left(3+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)}{4x^2}=\dfrac{3}{4}$

11. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^3+x+4}}{1+x}$ 《中興》

《提示》➥ $\dfrac{\infty}{\infty}$ 根式型

《解》☞ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^3+x+4}}{1+x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{1+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{4}{x^3}}}{\dfrac{1}{x}+1}=1$

12. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+\sqrt{x^2+1}}{3x+1}$

《提示》➥ $\dfrac{\infty}{\infty}$ 根式型

《解》☞ 令 $x=-u$，故

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{3x+1}=\lim_{u\to\infty}\frac{-u+\sqrt{u^2+1}}{-3u+1}=\lim_{u\to\infty}\frac{-1+\sqrt{1+\dfrac{1}{u^2}}}{-3+\dfrac{1}{u}}=0$$

13. Consider the function $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ defined by $f(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+1}}$. Note f is well defined as $x^2+1>0$ for all $x\in\mathbb{R}$. Please find $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$. Show your work.

《政大國貿金融統計資管》

《解》☞ 令 $x=-t$，故 $x\to-\infty$，則 $t\to\infty$，因此

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{t\to\infty}\frac{-t-1}{\sqrt{(-t)^2+1}}=\lim_{t\to\infty}\frac{-t-1}{\sqrt{t^2+1}}=-1$$

14. 求下列極限：

(a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3^x-4^x}{3^x+4^x}$ (b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3^x-4^x}{3^x+4^x}$

《提示》 ➥ $\dfrac{\infty}{\infty}$ 指數型

《解》 ☞

(a) $$\lim_{x\to\infty}\frac{3^x-4^x}{3^x+4^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(\frac{3}{4})^x-1}{(\frac{3}{4})^x+1}=\frac{0-1}{0+1}=-1$$

(b) $$\lim_{x\to-\infty}\frac{3^x-4^x}{3^x+4^x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1-(\frac{4}{3})^x}{1+(\frac{4}{3})^x}=\frac{1-0}{1+0}=1$$

15. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+2^{\frac{1}{x}}}{3-2^{\frac{1}{x}}}$

《提示》 ➥ $\dfrac{\infty}{\infty}$ 指數型

《解》 ☞ 因

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1+2^{\frac{1}{x}}}{3-2^{\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{2^{\frac{1}{x}}}+1}{\frac{3}{2^{\frac{1}{x}}}-1}=-1$$

且

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{1+2^{\frac{1}{x}}}{3-2^{\frac{1}{x}}}=\frac{1}{3}$$

故

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1+2^{\frac{1}{x}}}{3-2^{\frac{1}{x}}}\neq\lim_{x\to 0^-}\frac{1+2^{\frac{1}{x}}}{3-2^{\frac{1}{x}}}$$

因此極限不存在。

16. Find the value of c such that the limit exists and evaluate the limit.

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{c}{x^3-1}\right)$$ 《台大C》

《提示》 ➥ $\infty-\infty$ 分式型

《解》 ☞ 因

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{c}{x^3-1}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x+1-c}{x^3-1}=\text{存在}$$

因分母函數 $x\to 1$ 時為 0，故 $\lim_{x\to 1}(x^2+x+1-c)=3-c=0$，可得 $c=3$，且

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{c}{x^3-1}\right) &= \lim_{x\to 1}\frac{x^2+x+1-c}{x^3-1}\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{x^2+x+1-3}{x^3-1}\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{2x+1}{3x^2}=1\end{aligned}$$

17. $\lim_{x\to\infty}\left[\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right]$ 《台聯大A3、台大》

《提示》 ➥ $\infty-\infty$ 根式型

《解》 ☞

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to\infty}\left[\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right]\\ =\ &\lim_{x\to\infty}\frac{\left[\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right]\left[\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}\right]}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}}\\ =\ &\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x\sqrt{x}}}}+1}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

18. 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x}(\sqrt{x+2}-\sqrt{x}\ )$ 《成大、政大財政》

《提示》 ➥ $\infty-\infty$ 根式型

《解》 ☞

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\sqrt{x}(\sqrt{x+2}-\sqrt{x}\ ) &= \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x+2}-\sqrt{x}\ )(\sqrt{x+2}+\sqrt{x}\ )}{(\sqrt{x+2}+\sqrt{x}\ )}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{2\sqrt{x}}{(\sqrt{x+2}+\sqrt{x}\ )}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1}=1\end{aligned}$$

19. 求下列極限

(a) $\lim\limits_{t\to\infty}(\sqrt{t^2+t+1}-t\ )$ (b) $\lim\limits_{t\to\infty}(\sqrt{t+\sqrt{t}}-\sqrt{t-\sqrt{t}}\ )$

(c) $\lim\limits_{t\to\infty}\sqrt{t}\ (\sqrt{t+1}-\sqrt{t-1}\ )$

《提示》 ➥ $\infty-\infty$ 根式型

《解》 ☞

(a) $$\lim_{t\to\infty}(\sqrt{t^2+t+1}-t)=\lim_{t\to\infty}\frac{t+1}{\sqrt{t^2+t+1}+t}=\lim_{t\to\infty}\frac{1+\frac{1}{t}}{\sqrt{1+\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}}+1}=\frac{1}{2}$$

(b)

$$\begin{aligned}&\lim_{t\to+\infty}(\sqrt{t+\sqrt{t}}-\sqrt{t-\sqrt{t}}\ )\frac{\sqrt{t+\sqrt{t}}+\sqrt{t-\sqrt{t}}}{\sqrt{t+\sqrt{t}}+\sqrt{t-\sqrt{t}}}\\ &=\lim_{t\to+\infty}\frac{t+\sqrt{t}-t+\sqrt{t}}{\sqrt{t+\sqrt{t}}+\sqrt{t-\sqrt{t}}}\end{aligned}$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{t}}}+\sqrt{1-\sqrt{\frac{1}{t}}}} = 1$$

(c)

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} \sqrt{t}\,(\sqrt{t+1}-\sqrt{t-1}) &= \lim_{t\to\infty} \sqrt{t}\,(\sqrt{t+1}-\sqrt{t-1})\frac{\sqrt{t+1}+\sqrt{t-1}}{\sqrt{t+1}+\sqrt{t-1}} \\
&= \lim_{t\to\infty} \frac{\sqrt{t}\,(t+1-t+1)}{\sqrt{t+1}+\sqrt{t-1}} \\
&= \lim_{t\to\infty} \frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{t}}+\sqrt{1-\frac{1}{t}}} = 1
\end{aligned}$$

20. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\sqrt{x^2+4x+5}-\sqrt{x^2+2x+1}\right]$ 《政大經濟》

《解》 ☞ 令 $t=-x$, 故 $x\to-\infty$, 則 $t\to\infty$

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to-\infty}\left[\sqrt{x^2+4x+5}-\sqrt{x^2+2x+1}\,\right] \\
=\ &\lim_{t\to\infty}\left[\sqrt{t^2-4t+5}-\sqrt{t^2-2t+1}\,\right] \\
=\ &\lim_{t\to\infty}\frac{(t^2-4t+5)-(t^2-2t+1)}{\sqrt{t^2-4t+5}+\sqrt{t^2-2t+1}} \\
=\ &\lim_{t\to\infty}\frac{-2t+4}{\sqrt{t^2-4t+5}+\sqrt{t^2-2t+1}} = -1
\end{aligned}$$

21. Find the limit : $\lim\limits_{x\to1^+}\left[\ \ln(x^5-1)-\ln(x^3-1)\right]$. 《中正理工系》

《提示》 ➥ $\infty-\infty$ 對數型

《解》 ☞

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to1^+}\left[\ \ln(x^5-1)-\ln(x^3-1)\right] &= \lim_{x\to1^+}\ln(\frac{x^5-1}{x^3-1}) = \ln\left[\lim_{x\to1^+}\frac{x^5-1}{x^3-1}\right] \\
&= \lim_{x\to1^+}\ln\left[\frac{(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)}\right] \\
&= \ln(\frac{5}{3})
\end{aligned}$$

挑戰範例

1. 設 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 滿足

(a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x)}{x-1} = 2$　　(b) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{f(x)}{x-2} = 3$

試求 a、b、c、d。

《提示》 ➥ 1. 明顯條件：(a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x)}{x-1} = 2$ ，(b) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{f(x)}{x-2} = 3$

2. 暗示條件：(a) $f(1) = 0$ ，(b) $f(2) = 0$

《解》 ☞

(a) 由暗示條件可令

$$f(x) = (x-1)(x-2)(\alpha x + \beta)$$

(b) 由明顯條件可知

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x)}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x-2)(\alpha x + \beta) = -\alpha - \beta = 2$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{f(x)}{x-2} = \lim_{x\to 2}(x-1)(\alpha x + \beta) = 2\alpha + \beta = 3$$

解上式可得 $\alpha = 5$、$\beta = -7$，故

$$f(x) = (x-1)(x-2)(5x-7) = 5x^3 - 22x^2 + 31x - 14$$

2. Is there a number a such that the following limit exists? If so, find the value of a and the value of the limit.

$$\lim_{x\to -2} \frac{3x^2 + ax + a + 3}{x^2 + x - 2}$$

《政大資管》

《解》☞ 令 $f(x)=3x^2+ax+a+3$，當

$$f(-2)=3(-2)^2+a(-2)+a+3=15-a=0$$

可得 $a=15$ 時，極限存在。且

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-2}\frac{3x^2+ax+a+3}{x^2+x-2} &= \lim_{x\to-2}\frac{3x^2+15x+15+3}{x^2+x-2}\\ &= \lim_{x\to-2}\frac{3(x+2)(x+3)}{(x+2)(x-1)}\\ &= -1\end{aligned}$$

3. 試求滿足下列二條件的最低次多項式 $f(x)$

(a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-x^4}{x^2}=2$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=1$

《提示》➥ 1. 明顯條件：(a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-x^4}{x^2}=2$ ，(b) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=1$

2. 暗示條件：(a) $\deg\{f(x)-x^4\}=2$ ，(b) $f(1)=0$

《解》☞

(a) 由暗示條件 $\deg\{f(x)-x^4\}=2$ 可知，$f(x)$ 的最高次爲 x^4 且缺 x^3 項，再由 $f(1)=0$，故 $f(x)$ 可令成

$$f(x)=(x-1)(x^3+x^2+\alpha x+\beta)$$

(b) 由明顯條知

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-x^4}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{(\alpha-1)x^2+(\beta-\alpha)x-\beta}{x^2}=\alpha-1=2$$

故 $\alpha=3$，再由

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}(x^3+x^2+\alpha x+\beta)=1+1+\alpha+\beta=1$$

故 $\beta=-4$，因此

$$f(x)=(x-1)(x^3+x^2+3x-4)=x^4+2x^2-7x+4$$

4. 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+4x+1}-(ax+1)}{x^2}=b$，其中 a、$b\in\mathbb{R}$，則 a、b 爲何？

《解》 ☞ 因

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+4x+1}-(ax+1)}{x^2}=b$$

有理化分子可得

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1-a^2)x^2+(4-2a)x}{x^2(\sqrt{x^2+4x+1}+ax+1)}=b$$

故可得 $4-2a=0$，則 $a=2$，代回上式可得

$$\lim_{x\to 0}\frac{-3}{\sqrt{x^2+4x+1}+2x+1}=b$$

則 $b=-\dfrac{3}{2}$

5. If $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{ax+b}-2}{x}=1$, then $a-b=$? 《台聯大A3A4A7》

《解》 ☞ 由

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{ax+b}-2}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{ax+b-4}{x(\sqrt{ax+b}+2)}=1$$

可得 $b-4=0$，即 $b=4$，由

$$\lim_{x\to 0}\frac{ax+b-4}{x(\sqrt{ax+b}+2)}=\lim_{x\to 0}\frac{ax}{x(\sqrt{ax+b}+2)}=\lim_{x\to 0}\frac{a}{\sqrt{ax+4}+2}=\frac{a}{4}=1$$

故 $a=4$。則 $a-b=4-4=0$

6. a、$b\in\mathbb{R}$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-(1+ax)}{x^2}=b$，求 a、b 之值。

《解》☞ 因 $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-(1+ax)}{x^2}=b$，故

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1+x+x^2-1-2ax-a^2x^2}{x^2[\sqrt{1+x+x^2}+(1+ax)]} &= \lim_{x\to 0}\frac{x(1-2a)+x^2(1-a^2)}{x^2[\sqrt{1+x+x^2}+(1+ax)]}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{(1-2a)+x(1-a^2)}{x[\sqrt{1+x+x^2}+(1+ax)]}\\ &= b\end{aligned}$$

故 $(1-2a)=0$，可解得 $a=\dfrac{1}{2}$，代回原式可得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{3}{4}x}{x[\sqrt{1+x+x^2}+(1+\frac{1}{2}x)]}=\frac{3}{8}=b$$

故可得 $a=\dfrac{1}{2}$、$b=\dfrac{3}{8}$。

7. 若 $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-ax-b)=0$，則實數 a、b 為何？

《解》☞ 因 $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-ax-b)=0$，故

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2-x+1}-ax-b}{x}=0$$

由

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2-x+1}-ax-b}{x}=\lim_{x\to\infty}\left[\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-a-\frac{b}{x}\right]=1-a=0$$

可得 $a=1$，代回原式可得

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-x-b)=0$$

故

$$b=\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-x)=\lim_{x\to\infty}\frac{-x+1}{\sqrt{x^2-x+1}+x}=-\frac{1}{2}$$

8. Suppose that a, b and c are constants and $\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{ax^2+bx+c}+3x)=2$, then $(a\,,\,b)=?$ 《台大B》

《解》 ☞ 令 $x=-t$，當 $x\to-\infty$，故 $t\to\infty$，原式可改寫成

$$\lim_{t\to\infty}(\sqrt{at^2-bt+c}-3t)=2$$

有理化可得

$$\lim_{t\to\infty}\frac{at^2-bt+c-9t^2}{\sqrt{at^2-bt+c}+3t}=\lim_{t\to\infty}\frac{(a-9)t^2-bt+c}{\sqrt{at^2-bt+c}+3t}=2$$

故 $a-9=0$ 且 $\dfrac{-b}{\sqrt{a}+3}=2$，可求得 $a=9$ 及

$$b=-2(\sqrt{a}+3)=-2(3+3)=-12$$

因此 $(a\,,b)=(9\,,-12)$。

9. (a) Find the limit $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{x+2}-x}{x^2-2x}$ if it exits. 《中山海科》

(b) 已知 m 為有理數，求 $\lim\limits_{x\to1}(\dfrac{x^m-1}{x-1})=?$ 《中興C組》

《解》 ☞ 利用 L'Hôpital Rule 來求解

(a) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{x+2}-x}{x^2-2x}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\dfrac{1}{2\sqrt{x+2}}-1}{2x-2}=-\dfrac{3}{8}$

(b) $\lim\limits_{x\to1}(\dfrac{x^m-1}{x-1})=\lim\limits_{x\to1}mx^{m-1}=m$

精選習題

1. Find $\lim\limits_{x\to 0}\cos(x+\sin x)$. 《高大資工》

《解》☞ ：1

2. $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$

《解》☞ ：-2

3. The value of $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{3+x}-\sqrt{3}}{x}$ is ? 《北大經濟》

《解》☞ ：$\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$

4. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt{10-3x}-2}$ 《海洋大學》

《解》☞ ：$-\dfrac{4}{3}$

5. $\lim\limits_{x\to 1}\cos(\sin^{-1}(\dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x}))$ 《政大數學一》

《解》☞ ：$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

6. 求 $\lim\limits_{x\to 5^-}\dfrac{\sqrt{x^2-10x+25}}{2x-10}=?$ 《嘉義大學》

《解》☞ ：$-\dfrac{1}{2}$

7. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{a+h}-\sqrt[3]{a-h}}{h}$ 《解》☞ ：$\dfrac{2}{3\sqrt[3]{a^2}}$ 《中興》

8. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+3}{\sqrt{x^2-1}}$. 《解》☞ ：$3$ 《政大商院》

上冊 習題詳解

下冊 習題詳解

9. $\displaystyle\lim_{y\to\infty}\frac{\sqrt{y^2+2}}{5y-6}=?$ 《政大經濟》

《解》☞ ：$\dfrac{1}{5}$

10. $\displaystyle\lim_{y\to\infty}\sqrt{y^2+5y}-y$ 《台大》

《解》☞ ：$\dfrac{5}{2}$

11. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\sqrt{x+3}\cdot(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1})$ 《成大B》

《解》☞ ：$\dfrac{1}{2}$

12. Find value of $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(\sqrt{9x^2+2x}-3x)$. 《台師電機》

《解》☞ ：$\dfrac{1}{3}$

13. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+3n+1}-\sqrt{n^2-n-4})$ 《政大經濟》

《解》☞ ：2

14. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+3x}-x)$。 《中山電機》

《解》☞ ：$\dfrac{3}{2}$

15. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(x-\sqrt{x^2+2x})=?$ 《台大C》

《解》☞ ：-1

16. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+4x+1}-x)=?$ 《政大財政》

《解》☞ ：2

17. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(2x-\sqrt{4x^2+x}\ )$ 《高大應物》

《解》☞ ：$-\dfrac{1}{4}$

18. $$\lim_{x\to0^+}\left[\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}-\sqrt{\frac{1}{x}-\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}\ \right]$$

《解》☞ ：1

19. 令 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$，$a\neq0$, $\displaystyle\lim_{x\to-1}\frac{f(x)}{x+1}=2$, $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=1$, 求 $(a\,,\,d)=?$ 《政大財政》

《解》☞ ：$(a\,,\,d)=(\dfrac{3}{4}\,,\,\dfrac{1}{4})$。

1.2 特殊函數極限

觀念分析： 解特殊函數的極限，首先須利用特殊函數的定義，消去特殊函數。

1.2.1 夾擠定理 (The Squeeze Theorem or The Sandwich Theorem)

1. 若 $g(x) \le f(x) \le h(x)$，$0 < |x-a| < \delta$，且 $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = \ell$，則 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$

2. 若 $g(x) \le f(x) \le h(x)$，$\forall\, x \ge k$，且 $\lim\limits_{x\to \infty} g(x) = \lim\limits_{x\to \infty} h(x) = \ell$，則 $\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = \ell$

1.2.2 最大整數函數* $\lfloor x \rfloor$ (Greatest Integer Function or Integer Floor Function)

1. 定義及基本性質：$\lfloor x \rfloor$（亦可用 $[x]$、$[\![x]\!]$ 來表示）：取不大於 x 的最大整數。

(1) $\lfloor x \rfloor = n \Leftrightarrow n \le x < n+1$，$\forall\, n \in \mathbb{Z}$

(2) $\lfloor \lfloor x \rfloor \rfloor = \lfloor x \rfloor$

(3) $\lfloor x \pm n \rfloor = \lfloor x \rfloor \pm n$，$\forall\, n \in \mathbb{N}$

(4) $\lfloor x \rfloor = n \Leftrightarrow n \le x < n+1$，故 $x - 1 < \lfloor x \rfloor \le x$

(5) $\lfloor -x \rfloor = -\lfloor x \rfloor - 1$，$\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$

2. 消去最大整數函數的方法：

(1) 直接消去法：已知 x 介於兩連續整數之間，即 $n < x < n+1$，則 $\lfloor x \rfloor = n$。

(2) 間接消去法：

(a) $x \to a \;\Rightarrow\; x - 1 < \lfloor x \rfloor < x$。

(b) $x \to \pm\infty \;\Rightarrow\; x - 1 < \lfloor x \rfloor \le x$。

(c) $x \to \pm\infty \;\Rightarrow\; \lfloor x \rfloor \to \pm\infty$，即 $\lfloor x \rfloor \to x$。

---

*最大整數函數又稱爲高斯符號(記號)，是一個數學符號，高斯符號首次出現是在 Johann Carl Friedrich Gauss (April 1777 ∼ February 1855) 於1798年寫成的一本數論教材 ”算術研究” (Disquisitiones Arithmeticae) 的數學巨著中 (該巨著在1801年他24歲時首次出版)，以 $[x]$ 或 $[\![x]\!]$ 形式來表示，後來加拿大計算機科學家 Kenneth Eugene Iverson (December 1920 ∼ October 2004) 在1962年時，於其著作 ”A Programming Language” 中把高斯符號稱作 Integer Floor Function 以 $\lfloor x \rfloor$ 符號來表示，並同時引進天花板函數 $\lceil x \rceil$ (Integer ceiling functions or least integer function)：The least integer that is greater than or equal to x. $\lceil x \rceil = m \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow m-1 < x \le m$.

1.2.3 其他特殊函數

1. 絕對值函數

(1) 定義：

$$|x| = \begin{cases} x & ; x \geq 0 \\ -x & ; x < 0 \end{cases}$$

(2) 基本性質

(a) $|xy| = |x||y|$、$|\frac{x}{y}| = \frac{|x|}{|y|}$；$(y \neq 0)$

(b) $||x| - |y|| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|$

(c) $|x \pm y \pm z| \leq |x| + |y| + |z|$

2. 符號函數：

$$\operatorname{sgn}(\, x\,) = \begin{cases} 1 & ; x > 0 \\ 0 & ; x = 0 \\ -1 & ; x < 0 \end{cases}$$

3. 二項式

(1)

$$\begin{aligned} (1+x)^n &= C_0^n + C_1^n x + C_2^n x^2 + \cdots + C_n^n x^n \;;\; (n \in \mathbb{N}) \\ &= 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \cdots + x^n \end{aligned}$$

其中 $C_m^n = C(n\,,\,m) = \dfrac{n!}{(n-m)!m!} = \dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{m!}$ *

(2) $(1+x)^n = 1 + nx + \dfrac{n(n-1)}{2!}x^2 + \dfrac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \cdots$；$(n \notin \mathbb{N} \cup \{0\})$

(3) $(1+h)^n \geq 1 + nh > nh$；$(n \in \mathbb{N}\,,\; h > 0)$

---

*現在用的階乘符號 $n! = n \cdot (n-1) \cdot \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$；$(\forall n \geq 1)$ 是法國數學家卡曼 (Christian Kramp, 1760 ~ 1826) 於1808 在他所編著的 Elements d'arithmétique universelle 第219頁中首次使用, 後經德國數學家、物理學家歐姆 (Georg Simon Ohm, 1789 ~ 1854) 等人的倡議而流行起來，沿用到現在。1728 年普魯士數學家哥德巴赫 (Christian Goldbach，1690 ~ 1764) 在研究階乘數列 $\{1\,,\,2\,,\,6\,,\,24\,,\,120\,,\,720\,,\,\cdots\} = \{1!\,,\,2!\,,\,3!\,,\,4!\,,\,5!\,,\,6!\,,\,\cdots\}$ 插值的問題時, 他在想是否可以 1! 和 2! 中插一值 (1.5)!, 也就是想將階乘數列遞迴關係 $n! = n \cdot (n-1)!$ 從 $n \geq 2$ 解析延拓 (analysis continuation) 到實數域與複數域, 但是哥德巴赫無法解決這個問題, 於是請教約翰-白努利 (Johann Bernoulli, 1667 ~ 1748) 的兩個兒子, 尼古拉-白努利 (Nikolaus I. Bernoulli 1687 ~ 1759) 及他的弟弟丹尼爾-白努利 (Daniel Bernoulli, 1700 ~ 1782), 由於當時 Euler 正在向 Johann Bernoulli 學習數學, 他也得知了這個問題, 於是 Euler 也開始研究這一問題, Euler 於 1729 年推出了 Gamma 函數 (第二型 Euler 積分), 完美的解決了這一個問題, 當時 Euler 才22歲。

精選範例

1. 求下列極限

(a) $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x-\lfloor x\rfloor}{x-1}$ (b) $\lim\limits_{x\to 10^-}\dfrac{\lfloor x^3\rfloor - x^3}{\lfloor x\rfloor - x}$ (c) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\lfloor x\rfloor}{x}$

《提示》 ➥ 最大整數函數直接消去法：$n<x<n+1 \Rightarrow \lfloor x\rfloor = n$

《解》 ☞

(a) $x\to 1^+$，則 $1<x<2$，故 $\lfloor x\rfloor = 1$，因此

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x-\lfloor x\rfloor}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x-1}{x-1}=1$$

(b) $x\to 10^-$，則 $9<x<10$，故 $\lfloor x\rfloor = 9$，又 $x\to 10^-$，則 $x^3\to 1000^-$，故 $999<x^3<1000$，因此 $\lfloor x^3\rfloor = 999$，故

$$\lim_{x\to 10^-}\frac{\lfloor x^3\rfloor - x^3}{\lfloor x\rfloor - x}=\lim_{x\to 10^-}\frac{999-x^3}{9-x}=\frac{-1}{-1}=1$$

(c) $x\to 0^+$，則 $0<x<1$，故 $\lfloor x\rfloor = 0$，因此

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\lfloor x\rfloor}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{0}{x}=0$$

2. 求 $\lim\limits_{x\to a}\lfloor x-\lfloor x-1\rfloor\rfloor$

《提示》 ➥ $\lfloor x\pm n\rfloor = \lfloor x\rfloor \pm n$，$\forall n\in\mathbb{N}$

《解》 ☞ $\lim\limits_{x\to a}\lfloor x-\lfloor x-1\rfloor\rfloor = \lim\limits_{x\to a}\lfloor x-\lfloor x\rfloor\rfloor + 1 = \lim\limits_{x\to a}(\lfloor x\rfloor - \lfloor x\rfloor)+1 = 1$

3. 求 $\lim\limits_{x\to 1}\lfloor 2x-x^2\rfloor$

《解》 ☞ 令 $x=1+t$，則

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\lfloor 2x-x^2\rfloor &= \lim_{t\to 0}\lfloor 2(1+t)-(1+t)^2\rfloor\\ &= \lim_{t\to 0}\lfloor 2+2t-1-2t-t^2\rfloor\\ &= \lim_{t\to 0}\lfloor 1-t^2\rfloor \quad (\because\ t\to 0\Rightarrow t^2\to 0^+)\\ &= 0\end{aligned}$$

4. 求 (a) $\lim\limits_{x\to 0^+}\lfloor\frac{1}{x}\rfloor x$ (b) $\lim\limits_{x\to 0}\lfloor\frac{1}{x}\rfloor x^2$ 《中興B組》

《提示》 ➥ (1) 最大整數函數間接消去法：

(i) $x\to a\Rightarrow x-1<\lfloor x\rfloor<x$

(ii) $x\to\pm\infty\Rightarrow x-1<\lfloor x\rfloor\le x$

(2) 配合夾擠定理

《解》 ☞

(a) 因 $x\to 0^+$，則 $\frac{1}{x}\to\infty$，故

$$\frac{1}{x}-1<\lfloor\frac{1}{x}\rfloor\le\frac{1}{x}$$

上式同乘 $x\,(x>0)$，故可得

$$1-x<\lfloor\frac{1}{x}\rfloor x\le 1$$

又 $\lim\limits_{x\to 0^+}(1-x)=1$，故由夾擠定理知 $\lim\limits_{x\to 0^+}\lfloor\frac{1}{x}\rfloor x=1$

速解：令 $t=\frac{1}{x}$，故 $x\to 0^+$，則 $t\to\infty$，故

$$\lim_{x\to 0^+}\lfloor\frac{1}{x}\rfloor x=\lim_{t\to\infty}\lfloor t\rfloor\cdot\frac{1}{t}=\lim_{t\to\infty}t\cdot\frac{1}{t}=1$$

(b) 因 $x \to 0$，則 $\frac{1}{x} \to \pm\infty$，故

$$\frac{1}{x} - 1 < \lfloor \frac{1}{x} \rfloor \leq \frac{1}{x}$$

上式同乘以 $x^2\,(x^2 > 0)$，故可得

$$x - x^2 < \lfloor \frac{1}{x} \rfloor x^2 \leq x$$

又 $\lim\limits_{x\to 0}(x - x^2) = 0$，且 $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$，故由夾擠定理知 $\lim\limits_{x\to 0}\lfloor \frac{1}{x} \rfloor x^2 = 0$

速解：令 $t = \frac{1}{x}$，故 $x \to 0$，則 $t \to \pm\infty$，故

$$\lim_{x\to 0}\lfloor \frac{1}{x} \rfloor x^2 = \lim_{t\to\pm\infty}\lfloor t \rfloor \cdot \frac{1}{t^2} = \lim_{t\to\pm\infty} t \cdot \frac{1}{t^2} = 0$$

5. Find the limit. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x(x^2-1)}{|x^2-1|}$. 《台聯A2, A3》

《解》 ☞

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{x(x^2-1)}{|x^2-1|} = \lim_{x\to -1^-} \frac{x(x^2-1)}{(x^2-1)} = \lim_{x\to -1^-} x = -1$$

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{x(x^2-1)}{|x^2-1|} = \lim_{x\to -1^+} \frac{x(x^2-1)}{-(x^2-1)} = \lim_{x\to -1^+} -x = 1$$

因 $\lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{x(x^2-1)}{|x^2-1|} \neq \lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{x(x^2-1)}{|x^2-1|}$，故 $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x(x^2-1)}{|x^2-1|}$ 不存在。

6. Find $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x(x-2)}{|x-2|}$. 《高師數學物理光電》

《解》 ☞ 因

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{2x(x-2)}{|x-2|} = \lim_{x\to 2^-} \frac{2x(x-2)}{-(x-2)} = -4$$

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{2x(x-2)}{|x-2|} = \lim_{x\to 2^+} \frac{2x(x-2)}{(x-2)} = 4$$

故 $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{2x(x-2)}{|x-2|} \neq \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{2x(x-2)}{|x-2|}$，因此 $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{2x(x-2)}{|x-2|}$ 不存在。

7. 求 (a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|-2-x|-|-2|}{x}$　　(b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{|x|}$

《解》 ☞

(a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|-2-x|-|-2|}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2+x-2}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x}=1$

(b) 因

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{|x|}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=1\text{ 、 }\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{|x|}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{-x}=-1$$

故 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{|x|}\neq\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x}{|x|}$，由定義知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{|x|}$ 不存在

8. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{sgn}(x)\cdot|x|$

《解》 ☞ 因 $x\to 0$，故 $-1\le\operatorname{sgn}(x)\le 1$，同乘以 $|x|$，可得

$$-|x|\le\operatorname{sgn}(x)\cdot|x|\le|x|$$

因 $\lim\limits_{x\to 0}(-|x|)=0$，且 $\lim\limits_{x\to 0}|x|=0$，由夾擠定理知

$$\lim_{x\to 0}\operatorname{sgn}(x)\cdot|x|=0$$

9. $f(x)=\begin{cases}x^2 & ;\text{若 } x\in\mathbb{Q}\\ x^3 & ;\text{若 } x\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}\end{cases}$　求 $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)$

《解》 ☞ 因 $x\to 1^+$，則 $x>1$，故 $x^2<x^3$，則

$$x^2\le f(x)\le x^3$$

因

$$\lim_{x\to 1^+}x^2=1\text{ 、 }\lim_{x\to 1^+}x^3=1$$

故由夾擠定理知 $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 1$

10. 試證若 $\lim_{x\to a} |f(x)| = 0$, 則 $\lim_{x\to a} f(x) = 0$

《証》 ☞ 因為

$$-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$$

且 $\lim_{x\to a} |f(x)| = 0$, 故由夾擠定理知 $\lim_{x\to a} f(x) = 0$

11. 試證若 $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ 且 $|g(x)| \le M\ (M > 0)$, $\forall\ 0 < |x-a| < \delta$, 即函數 $g(x)$ 在區間 $0 < |x-a| < \delta$ 中為有界的函數 , 則 $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = 0$

《証》 ☞ 因 $|g(x)| \le M\ (M > 0)$, $\forall\, 0 < |x-a| < \delta$, 則

$$0 \le |f(x)g(x)| = |f(x)|\ |g(x)| \le |f(x)|\, M$$

又 $\lim_{x\to a} f(x) = 0$, 故

$$\lim_{x\to a} 0 = \lim_{x\to a} |f(x)|\, M = 0$$

故由夾擠定理知 $\lim_{x\to a} |f(x)g(x)| = 0$, 故 $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = 0$

12. 試證明 $\lim_{x\to 0} x^2 \sin\dfrac{1}{x} = 0.$ 《政大財政、南大電機》

《解》 ☞ 因

$$0 \le |x^2 \sin\frac{1}{x}| \le x^2$$

且 $\lim_{x\to 0} 0 = \lim_{x\to 0} x^2 = 0$, 由夾擠定可知 $\lim_{x\to 0} |x^2 \sin\dfrac{1}{x}| = 0$, 故

$$\lim_{x\to 0} x^2 \sin\frac{1}{x} = 0$$

13. 求 $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{x^3\sin\frac{1}{x}}{x-\lfloor x\rfloor}$ 《成大》

《解》 ☞ 因為

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x^3\sin\frac{1}{x}}{x-\lfloor x\rfloor}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^3\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to 0^+}x^2\sin\frac{1}{x}$$

又

$$0\le\left|x^2\sin\frac{1}{x}\right|\le x^2$$

且 $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}x^2=0$，故由夾擠定理知 $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\left|x^2\sin\frac{1}{x}\right|=0$，故

$$\lim_{x\to 0^+}x^2\sin\frac{1}{x}=0$$

則 $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{x^3\sin\frac{1}{x}}{x-\lfloor x\rfloor}=0$

14. 求下列極限

(a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\Big[\sin[\ln(x+1)]-\sin(\ln x)\Big]$

《提示》 ➥ 求極限 ⇒ 和差化積；求積分 ⇒ 積化和差

積化和差：$2\sin\alpha\cdot\cos\beta=\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)$

$$2\cos\alpha\cdot\sin\beta=\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)$$

$$2\cos\alpha\cdot\cos\beta=\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)$$

$$-2\sin\alpha\cdot\sin\beta=\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)$$

和差化積：$\displaystyle\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

《解》 ☞

(a)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}\,) &= \lim_{x\to\infty}\left[2\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\cdot\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\right]\\ &= \lim_{x\to\infty}\left[2\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\cdot\sin\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\,)}\right]\end{aligned}$$

因

$$0\le\left|2\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\cdot\sin\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\,)}\right|\le2\left|\sin\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\,)}\right|$$

又

$$\lim_{x\to\infty}\sin\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\,)}=\sin 0=0$$

則

$$\lim_{x\to\infty}2\left|\sin\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\,)}\right|=0$$

故根據夾擠定理知

$$\lim_{x\to\infty}\left|2\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\cdot\sin\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\,)}\right|=0$$

故

$$\lim_{x\to\infty}\left[2\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\cdot\sin\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\,)}\right]=0$$

因此

$$\lim_{x\to\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}\,)=0$$

(b)

$$\lim_{x\to\infty}\Big[\sin[\ln(x+1)]-\sin(\ln x)\Big]=\lim_{x\to\infty}\left[2\cos\frac{\ln(x+1)+\ln x}{2}\cdot\sin\frac{\ln(x+1)-\ln x}{2}\right]$$

則

$$0\le\left|2\cos\frac{\ln(x+1)+\ln x}{2}\cdot\sin\frac{\ln(x+1)-\ln x}{2}\right|\le2\left|\sin\frac{\ln(x+1)-\ln x}{2}\right|$$

又

$$\lim_{x\to\infty}\Big[\ln(x+1)-\ln x\Big]=\lim_{x\to\infty}\ln\frac{x+1}{x}=\ln 1=0$$

則

$$\lim_{x\to\infty}\sin\frac{\ln(x+1)-\ln x}{2}=0$$

故

$$\lim_{x\to\infty}2\left|\sin\frac{\ln(x+1)-\ln x}{2}\right|=0$$

故根據夾擠定理知

$$\lim_{x\to\infty}\left|2\cos\frac{\ln(x+1)+\ln x}{2}\cdot\sin\frac{\ln(x+1)-\ln x}{2}\right|=0$$

則

$$\lim_{x\to\infty}2\cos\frac{\ln(x+1)+\ln x}{2}\cdot\sin\frac{\ln(x+1)-\ln x}{2}=0$$

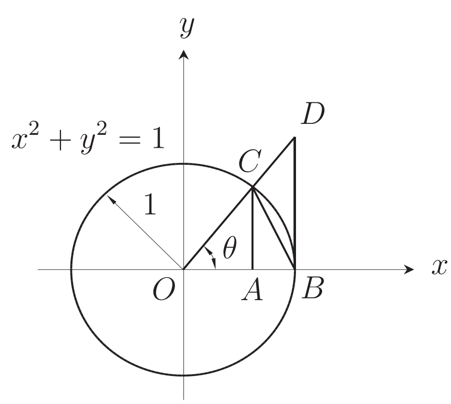
因此

$$\lim_{x\to\infty}\Big[\sin[\ln(x+1)]-\sin(\ln x)\Big]=0$$

15. 求下列極限

(a) $\displaystyle\lim_{\theta\to0^+}\cos\theta=1$ (b) $\displaystyle\lim_{\theta\to0^+}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$

(c) $\displaystyle\lim_{\theta\to0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$ 《政大數學1》 (d) $\displaystyle\lim_{\theta\to0}\frac{\tan\theta}{\theta}=1$



《証》 ☞ 因 $\theta\to0^+$，故 $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$，由上圖可知

$$\Delta OBC<\text{扇形 }OBC\text{ 面積}<\Delta OBD$$

則

$$\frac{1}{2}\cdot1\cdot\sin\theta<\frac{1}{2}\cdot1^2\cdot\theta<\frac{1}{2}\cdot1\cdot\tan\theta$$

故

$$0 < \sin\theta < \theta < \tan\theta$$

因 $\lim\limits_{\theta\to 0^+} \theta = 0$, 由夾擠定理可知

$$\lim_{\theta\to 0^+} \sin\theta = 0$$

(a) 由

$$0 < 1-\cos\theta = 2\sin^2\frac{\theta}{2} < 2\cdot(\frac{\theta}{2})^2 = \frac{\theta^2}{2}$$

且 $\lim\limits_{\theta\to 0^+} \dfrac{\theta^2}{2} = 0$, 由夾擠定理可知

$$\lim_{\theta\to 0^+}(1-\cos\theta) = 0$$

故 $\lim\limits_{\theta\to 0^+} \cos\theta = 1$

(b) 由

$$\sin\theta < \theta < \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

則

$$1 < \frac{\theta}{\sin\theta} < \frac{1}{\cos\theta}$$

故

$$\cos\theta < \frac{\sin\theta}{\theta} < 1$$

又 $\lim\limits_{\theta\to 0^+} \cos\theta = 1$, 故根據夾擠定理可知

$$\lim_{\theta\to 0^+} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$$

(c) 由

$$\lim_{\theta\to 0^+} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$$

令 $\theta = -t$, 故 $\theta \to 0^+$, 則 $t \to 0^-$, 代入上式可得

$$\lim_{\theta\to 0^+} \frac{\sin\theta}{\theta} = \lim_{t\to 0^-} \frac{\sin(-t)}{(-t)} = \lim_{t\to 0^-} \frac{\sin t}{t} = 1$$

因

$$\lim_{\theta\to 0^+} \frac{\sin\theta}{\theta} = \lim_{\theta\to 0^-} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$$

故

$$\lim_{\theta\to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$$

(d)

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\tan\theta}{\theta}=\lim_{\theta\to 0}\left[\frac{\sin\theta}{\theta}\cdot\frac{1}{\cos\theta}\right]=\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}\cdot\lim_{\theta\to 0}\frac{1}{\cos\theta}=1$$

16. 設 $n\in\mathbb{N}$，試證

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n^n}=0$ (b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n}{n!}=0$ (c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{n!}=0$

《提示》 ➥ 分母縮小 (保留一項)，則不等式放大。

《証》 ☞ (a) 因

$$0<\frac{n!}{n^n}=\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}{\underbrace{n\cdot n\cdot n\cdots n\cdot n\cdot n}_{n\text{ 個}}}<\frac{n\cdot(n-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}{n\cdot(n-1)\cdots 3\cdot 2\cdot n}=\frac{1}{n}$$

又 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$，故根據夾擠定理可知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0$$

(b) 因

$$0<\frac{3^n}{n!}=\frac{\overbrace{3\cdot 3\cdot 3\cdots 3\cdot 3\cdot 3}^{n\text{ 個}}}{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}<\frac{3}{n}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{1}=\frac{27}{2n}$$

又 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{27}{2n}=0$，故根據夾擠定理可知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{n!}=0$$

(c) 因

$$0<\frac{n^2}{n!}=\frac{n\cdot n}{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}<\frac{n}{(n-1)}\cdot\frac{1}{(n-2)}$$

又 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{(n-1)(n-2)}=0$，故根據夾擠定理知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n!}=0$$

17. 設 $n\in\mathbb{N}$，試證下列極限 《政大經濟》

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$ (b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^2+1}=1$

《証》 ☞

(a) 因 $n \to \infty$, 故 $n > 1$, 則 $\sqrt[n]{n} > \sqrt[n]{1} = 1$, 因此

$$\exists\ h_n > 0 \ \text{ 使得 } \ \sqrt[n]{n} = 1 + h_n$$

故

$$n = (1 + h_n)^n > \frac{n(n-1)}{2!}\ h_n^2$$

兩端乘上 $\dfrac{2}{n(n-1)}$, 可得

$$h_n^2 < \frac{2n}{n(n-1)}$$

兩端開根號可得

$$0 < h_n < \sqrt{\frac{2n}{n(n-1)}}$$

又 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{2n}{n(n-1)}} = 0$, 故根據夾擠定理可知 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} h_n = 0$, 故

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} (1 + h_n) = 1$$

(b) 因 $n \to \infty$, 則 $n^2 + 1 > 1$, 故 $\sqrt[n]{n^2+1} > \sqrt[n]{1} = 1$, 因此

$$\exists\ h_n > 0 \ \text{ 使得 } \ \sqrt[n]{n^2+1} = 1 + h_n$$

則

$$n^2 + 1 = (1 + h_n)^n > \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\ h_n^3$$

兩端乘上 $\dfrac{6}{n(n-1)(n-2)}$, 可得

$$h_n^3 < \frac{6(n^2+1)}{n(n-1)(n-2)}$$

故

$$0 < h_n < \sqrt[3]{\frac{6(n^2+1)}{n(n-1)(n-2)}}$$

又 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{\frac{6(n^2+1)}{n(n-1)(n-2)}} = 0$, 故根據夾擠定理可知 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} h_n = 0$, 因此

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2+1} = \lim_{n\to\infty} (1 + h_n) = 1$$

18. 已知 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$；$n \in \mathbb{N}$，試證下列極限

(a) $\lim\limits_{n\to-\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$；$(n \in \mathbb{Z})$ (b) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$；$(x \in \mathbb{R})$

《証》 ☞

(a) 令 $m = -n$，故

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to-\infty}(1+\frac{1}{n})^n &= \lim_{m\to\infty}(1-\frac{1}{m})^{-m} = \lim_{m\to\infty}(\frac{m-1}{m})^{-m} \\
&= \lim_{m\to\infty}(\frac{m}{m-1})^m = \lim_{m\to\infty}(1+\frac{1}{m-1})^m \\
&\quad (\text{ 令 } k = m-1 \text{ }) \\
&= \lim_{k\to\infty}(1+\frac{1}{k})^{k+1} = \lim_{k\to\infty}(1+\frac{1}{k})^k \cdot (1+\frac{1}{k}) \\
&= e \cdot 1 = e
\end{aligned}$$

(b) 因 $x \in \mathbb{R}$，故可令 $n \le x < n+1$，當 $n \to \infty$ 時，由挾擠定理可知 $x \to \infty$，且

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{x} \le \frac{1}{n}$$

則

$$(1+\frac{1}{n+1})^n < (1+\frac{1}{x})^n \le (1+\frac{1}{x})^x < (1+\frac{1}{x})^{n+1} \le (1+\frac{1}{n})^{n+1}$$

又

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n+1})^n &= \lim_{m\to\infty}(1+\frac{1}{m})^{m-1} \\
&\quad (\text{令 } m = n+1 \text{ }) \\
&= \lim_{m\to\infty}\frac{(1+\frac{1}{m})^m}{1+\frac{1}{m}} \\
&= \frac{e}{1} = e
\end{aligned}$$

且

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{n+1} = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n \cdot (1+\frac{1}{n}) = e \cdot 1 = e$$

故由夾擠定理可知 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$

挑戰範例

1. 設 $n \in \mathbb{N}$，且 $0 < r < 1$，試證 (a) $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$ (b) $\lim_{n\to\infty} n \cdot r^n = 0$。《政大經濟》

《証》 ☞

(a) 因 $0 < r < 1$，故 $\exists\, h > 0$，使得 $r = \dfrac{1}{1+h}$，則

$$0 < r^n = \frac{1}{(1+h)^n} < \frac{1}{nh}$$

又 $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{nh} = 0$，故根據夾擠定理可知 $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$

(b) 因 $0 < r < 1$，故 $\exists\, h > 0$，使得 $r = \dfrac{1}{1+h}$，則

$$0 < n \cdot r^n = \frac{n}{(1+h)^n} < \frac{n}{\frac{n(n-1)}{2!}h^2}$$

又 $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n}{\frac{n(n-1)}{2!}h^2} = 0$，故根據夾擠定理可知 $\lim_{n\to\infty} n \cdot r^n = 0$

2. 設 $n \in \mathbb{N}$，且 $k > 0$，試證 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{k} = 1$

《証》 ☞

(1) $k = 1$：

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{k} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1} = 1$$

(2) $k > 1$：

$\sqrt[n]{k} > \sqrt[n]{1} = 1$，則

$$\exists\ h_n > 0 \ \text{ 使得 } \ \sqrt[n]{k} = 1 + h_n$$

故 $k = (1+h_n)^n > nh_n$，則

$$0 < h_n < \frac{k}{n}$$

又 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{k}{n} = 0$，根據夾擠定理可知

$$\lim_{n\to\infty} h_n = 0$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{k} = \lim\limits_{n\to\infty} (1+h_n) = 1$

(3) $0 < k < 1$：

$\frac{1}{k} > 1$，故由 (2) 可得 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{k}} = 1$，即 $\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{k}} = 1$，因此 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{k} = 1$

故由 (1)、(2)、(3) 知 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{k} = 1$

3. 設 $n \in \mathbb{N}$，試證下列極限

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x^n + y^n + z^n} = x$；$(x > y > z > 0)$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{e^n + n} = e$

《証》 ☞

(a) 因 $x > y > z > 0$，故 $x^n < x^n + y^n + z^n < 3x^n$，則

$$x < \sqrt[n]{x^n + y^n + z^n} < \sqrt[n]{3}\, x$$

又 $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt[n]{3}\, x) = x$，故根據夾擠定理可知

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x^n + y^n + z^n} = x = \max\{x\,,\, y\,,\, z\}$$

(b) 因 $e^n > n$，故 $e^n < e^n + n < 2e^n$，則

$$e < \sqrt[n]{e^n + n} < \sqrt[n]{2}e$$

又 $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt[n]{2}e) = e$，故根據夾擠定理可知 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{e^n + n} = e$

4. 求下列極限

(a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2^{x^2}}{5^{x^3}}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{5^{x^2}}{2^{x^3}}$

《解》 ☞

(a) 因 $x\to\infty$，故

$$0<\frac{2^{x^2}}{5^{x^3}}=\frac{2^{x^2}}{(5^x)^{x^2}}<\frac{2^{x^2}}{5^{x^2}}=(\frac{2}{5})^{x^2}\quad(\because 5^x>5^1)$$

又 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(\frac{2}{5})^{x^2}=0$，故根據夾擠定理知 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2^{x^2}}{5^{x^3}}=0$

(b) 因 $x\to\infty$，故

$$0<\frac{5^{x^2}}{2^{x^3}}=\frac{5^{x^2}}{(2^x)^{x^2}}<\frac{5^{x^2}}{(2^3)^{x^2}}=(\frac{5}{8})^{x^2}\quad(\because 2^x>2^3)$$

又 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(\frac{5}{8})^{x^2}=0$，故根據夾擠定理可知 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{5^{x^2}}{2^{x^3}}=0$

5. 設 $(x^2+2x-3)f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\tan^{-1}(x^2-1)$ 滿足

(a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=1$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 1}f(x)=2$

試求 a、b、c、d。

《解》 ☞ 因

$$f(x)=\frac{ax^3+bx^2+cx+d\tan^{-1}(x^2-1)}{x^2+2x-3}\tag{1}$$

由

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}f(x)&=\lim_{x\to\infty}\frac{ax^3+bx^2+cx+d\tan^{-1}(x^2-1)}{x^2+2x-3}\\&=\lim_{x\to\infty}\frac{ax+b+\dfrac{c}{x}+d\dfrac{\tan^{-1}(x^2-1)}{x^2}}{1+\dfrac{2}{x}-\dfrac{3}{x^2}}=1\end{aligned}$$

可得 $a=0$ 、$b=1$, 代回 (1) 式中 , 可得 $f(x)$ 爲

$$f(x)=\frac{x^2+cx+d\tan^{-1}(x^2-1)}{x^2+2x-3} \tag{2}$$

又由已知 $\lim\limits_{x\to1}f(x)=2$, 且 $\lim\limits_{x\to1}(x^2+2x-3)=0$ (分母極限爲 0) , 故

$$\lim_{x\to1}[x^2+cx+d\tan^{-1}(x^2-1)]=1+c=0$$

故可求得 $c=-1$, 代回 (2) 式中 , 可得 $f(x)$ 爲

$$f(x)=\frac{x^2-x+d\tan^{-1}(x^2-1)}{x^2+2x-3}$$

再由

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to1}f(x) &= \lim_{x\to1}\frac{x^2-x+d\tan^{-1}(x^2-1)}{x^2+2x-3}\\
&= \lim_{x\to1}\left[\frac{x^2-x}{x^2+2x-3}+d\cdot\frac{\tan^{-1}(x^2-1)}{x^2-1}\cdot\frac{x^2-1}{x^2+2x-3}\right]\\
&= \lim_{x\to1}\left[\frac{x(x-1)}{(x-1)(x+3)}+d\cdot\frac{\tan^{-1}(x^2-1)}{x^2-1}\cdot\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+3)}\right]\\
&= \lim_{x\to1}\left[\frac{x}{x+3}+d\frac{\tan^{-1}(x^2-1)}{x^2-1}\cdot\frac{x+1}{x+3}\right]\\
&= \frac{1}{4}+\frac{d}{2}=2
\end{aligned}$$

故 $d=\dfrac{7}{2}$