

序

許多看過這本書的同學，第一個反應，就有如王國維在人間詞話中的第三境「衆裏尋他千百度，驀然回首，那人卻在燈火闌珊處」，因爲想要應考微積分的同學，幾乎都有相同的問題，那就是在考試的前一、兩天，微積分要讀些什麼？由於坊間的一些參考書、歷屆試題不是太厚重就是理論太繁瑣艱澀，在考試的前幾天根本無從下手複習，其實在考試前一、兩天或是當天，千萬不要再作歷屆試題或是參考書中的題目，因爲這些題目有一部分不是馬上就可以解出，當天作它，會失掉信心，在考場上也會喪失許多靈感。因此喻超凡博士秉著武器在於精，不在於多；開火在於準，不在於強的理念，集多位博士級的資深微積分老師，將所有微積分考試所須的公式，精、準且有條理的彙整出來。以作爲同學在考試前衝刺所必備的工具書，考試當天所必帶的葵花寶典。

本書手稿雖經多次修定及校對，但仍難免有所疏漏之處，敬請各位老師和同學不吝賜教。同時本書已獲全國各大著名的補習班採用爲輔助教材，筆者在此致上最大的謝意。



喻超凡喻超弘 line 微積分討論群組

喻超凡

2024. 3.

喻超凡老師的家

超凡小鋪網址：<https://www.pcstore.com.tw/superyu>



喻超凡喻超弘 YouTube：<https://YouTube.com/@supyu>



喻超凡雲端翻轉數學教室：<http://www.superyu.idv.tw>



目錄

0 基礎數學	1
0.1 數學常見的符號	1
0.2 集合	1
0.2.1 集合的表示法	1
0.2.2 集合的基本運算	2
0.3 函數	3
0.3.1 定義	3
0.3.2 合成函數 (composite function)	4
0.3.3 反函數 (inverse function)	5
0.3.4 多項式 (Polynomial) 與分式 (Rational algebraic function)	5
0.3.5 指數 (exponential) 與對數函數 (logarithmic function)	6
0.3.6 三角函數	6
0.3.7 反三角函數 (Inverse Trigonometric functions)	10
0.3.8 雙曲線函數 (Hyperbolic function)	11
0.3.9 奇函數 (odd function) 與偶函數 (even function)	12
1 函數的極限與連續	13
1.1 極限 (Limit)	13
1.1.1 極限的直覺意義	13
1.1.2 運算子 ∞ (operator infinity)	13
1.1.3 極限的直覺求法	14
1.2 特殊函數極限	14
1.2.1 夾擠定理 (The Squeeze Theorem or The Sandwich Theorem or Pinching Theorem)	14
1.2.2 最大整數函數 $[x]$ (Greatest Integer Function or Integer Floor Function)	15
1.2.3 其他特殊函數	15
1.3 ϵ 、 δ 的極限定義	16
1.4 連續	16
1.5 連續的重要定理	16

2 導數及其應用	17
2.1 導數(Derivative)	17
2.1.1 導數的定義	17
2.1.2 常見函數的導數	18
2.2 導數的基本運算	19
2.2.1 四則運算	19
2.2.2 鏈微法則(Chain Rule)	19
2.2.3 反函數(Inverse Function) 之導數	20
2.2.4 參數方程式(Parametric Equation) 之導數	21
2.3 隱函數(Implicit Function) 的導數及高階導數	21
2.3.1 隱函數的導數	21
2.3.2 高階導數	21
2.4 微分均值定理	22
2.5 L'Hôpital Rule	23
2.5.1 L'Hôpital Rule	23
2.6 函數的極值及不等式的證明	24
2.6.1 單調函數(Monotonic Function)	24
2.6.2 函數的極值	25
2.7 函數圖形的描繪	26
2.8 導數的應用	28
2.8.1 曲線的切線(Tangent Line) 及法線 (Normal Line)	28
2.8.2 相對變率	29
2.8.3 方程式的根	29
2.8.4 函數的微分量(Differential) 與近似值	30
3 不定積分(Indefinite Integral)	31
3.1 定義	31
3.1.1 反導數(Antiderivative)	31
3.1.2 不定積分(Indefinite Integral) 的定義	31
3.2 不定積分的基本性質	32
3.2.1 基本性質	32
3.2.2 常見函數的不定積分	32
3.3 代換積分法(The Substitution Method)	34
3.3.1 合成函數(Composite Function) 的積分法	34
3.3.2 三角函數代換積分法(Trigonometric Substitutions)	34
3.3.3 $\sin x$ 與 $\cos x$ 有理函數的積分	34
3.4 部分積分法(Integration by Parts)	35
3.5 三角函數的積分(Trigonometric Integrals)	36

3.6	分式與根式函數	38
3.6.1	部分分式的理論	38
3.6.2	分式積分法	39
3.6.3	根式積分法	40
4	定積分及其應用	43
4.1	定積分(The Definite Integral)	43
4.1.1	定積分的基本性質	43
4.1.2	積分均值定理(The Mean Value Theorem for Integrals)	44
4.1.3	微積分基本定理(Fundamental Theorem of the Calculus)	44
4.2	黎曼和與數值積分	45
4.2.1	黎曼和(Riemann Sum)	45
4.2.2	數值積分	45
4.3	瑕積分(Improper Integral)	46
4.3.1	瑕積分的類型	46
4.3.2	瑕積分的斂散性	47
4.3.3	常見的重要瑕積分	48
4.4	平面面積、體積及弧長	50
4.4.1	平面面積	50
4.4.2	體積	57
4.4.3	弧長	58
4.4.4	平面的弧及區域的形心(centroid)	59
4.5	旋轉體的表面積與體積	61
4.5.1	旋轉體的表面積	61
4.5.2	旋轉體的體積	62
4.5.3	Pappus 定理 (Theorem of Pappus)	63
4.6	定積分的題型	64
5	無窮級數(Infinite Series)	65
5.1	常數級數(Series of Constant Terms)	65
5.1.1	常數級數定義	65
5.1.2	常數級數的審斂法	66
5.2	冪級數(Power Series)	69
5.2.1	定義	69
5.2.2	均勻收斂(Uniform Convergence)	69
5.2.3	收斂半徑(Radius of Convergence) 與收斂區間	69
5.3	Taylor's 級數與 Maclaurin's 級數	70
5.3.1	定義	70
5.3.2	Maclaurin's 級數展開式	70

5.4	級數和與近似值	72
5.4.1	級數和	72
5.4.2	近似值	72
6	向量分析	73
6.1	向量基本運算	73
6.1.1	向量的基本性質	73
6.1.2	加減法	74
6.1.3	數積 (Scalar product)	74
6.1.4	內積 (Dot product)	75
6.1.5	外積 (Cross product)	75
6.1.6	純量的三重積 (Triple scalar product)	76
6.1.7	向量的三重積 (Triple vector product)	77
6.2	空間平面	78
6.2.1	空間平面方程式	78
6.2.2	點到平面的距離	78
6.3	空間直線	78
6.3.1	空間直線方程式	78
6.3.2	直線的距離	79
6.4	空間曲面與空間曲線	80
6.4.1	空間曲面的表示方法	80
6.4.2	空間曲面的描繪	81
6.4.3	空間曲線	81
7	偏導數(Partial Derivatives)	83
7.1	多變數函數的極限與連續	83
7.1.1	多變數函數的定義	83
7.1.2	極限與連續	83
7.2	偏導數(Partial Derivatives)	86
7.2.1	雙變數函數的偏導數	86
7.2.2	三變數函數的偏導數	87
7.2.3	∇ (Del) 運算子	87
7.2.4	Jacobian 行列式	88
7.3	鏈微法則(Chain Rule)	89
7.3.1	全微分(Total Differential)	89
7.3.2	鏈微法則(Chain Rule)	90
7.4	方向導數(Directional Derivatives)	91
7.5	隱函數微分定理	92
7.6	法向量與切向量的應用	93

7.6.1	空間曲面的切平面與法線	93
7.6.2	空間曲線的法平面與切線	93
7.7	多變數函數極值	95
7.7.1	雙變數函數的極值	95
7.7.2	三變數函數的極值	95
7.7.3	有限制條件的函數極值	96
7.8	Leibnitz 微分公式	98
7.9	雙變數函數的 Taylor's 級數	98
8	重積分(Multiple Integrals)	99
8.1	二重積分(Double Integrals)	99
8.1.1	定義與基本性質	99
8.1.2	積分的上下限(Iterated Integrals)	101
8.2	三重積分(Triple Integrals)	103
8.2.1	定義與基本性質	103
8.2.2	積分的上下限(Iterated Integrals)	104
8.3	坐標軸變換	105
8.3.1	定理	105
8.3.2	圓柱坐標 (r, θ, z) 與極坐標 (r, θ)	106
8.3.3	球坐標 (ρ, ϕ, θ)	107
8.3.4	其他坐標	108
8.4	線積分及Green's 定理	109
8.4.1	線積分	109
8.4.2	與路徑無關的線積分(Conservative field or gradient field)	110
8.4.3	Green's 定理	111
8.5	面積分與散度定理及Stokes's 定理	112
8.5.1	面積分	112
8.5.2	Gauss's 散度定理與 Stokes's 定理	114
9	一階常微分方程式	115
9.1	基本定義	115
9.2	正合型(Exact)	116
9.2.1	一階正合 ODE	116
9.2.2	Grouping 方法	117
9.3	分離變數型微分方程式	117
9.4	線性型	118

第 0 章 基礎數學

0.1 數學常見的符號

1. $\forall$: for all (所有的) ; $\exists$: exist (存在)
2. $\ni$: such that (使得 s.t.)
3. $\Rightarrow$: 蘊涵
4. $\in$: belong to (屬於) ; $\subset$: subset (包含於) ; $\supset$: 包含

0.2 集合

0.2.1 集合的表示法

1. 表列式 : $A = \{ \alpha, \beta, \gamma \}$, 其中 α, β, γ 稱為集合 A 的元素 , 且 α 與 A 的關係表成 $\alpha \in A$ 唸成 α 屬 A 。
2. 構造式 : $A = \{ x \mid p(x) \}$ 或 $A = \{ x : p(x) \}$
3. 數集 :
 - (1) 自然數 (natural number) 或稱為計物數 : $\mathbb{N}$ 。
 - (2) 整數 (integer) : $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}$ 的來源為取自於德語 Zahlen (意為”數”) 的字首 。
 - (3) 有理數 (rational number) (分數)(可比的數) : $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}$ 的來源為取自於 quotient (商) 的字首 。
 - (4) 實數 (real number) (有理數加無理數) : $\mathbb{R}$ 。
 - (5) 無理數 (irrational number) (不能用分數表示者) : $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ 。
 - (6) 複數 (complex number) : $\mathbb{C}$ 。
4. 區間 (實數之集合) : 設 $a, b \in \mathbb{R}$
 - (1) 有限區間
 - (a) 閉區間 : $[a, b] = \{ x \mid a \leq x \leq b \}$
 - (b) 開區間 : $(a, b) = \{ x \mid a < x < b \}$
 - (c) 半開半閉區間 : $(a, b] = \{ x \mid a < x \leq b \}$ 、 $[a, b) = \{ x \mid a \leq x < b \}$

(2) 無限區間

(a) $[a, \infty) = \{x \mid x \geq a\}$; $(a, \infty) = \{x \mid x > a\}$

(b) $(-\infty, b] = \{x \mid x \leq b\}$; $(-\infty, b) = \{x \mid x < b\}$

(c) $(-\infty, \infty) = \{x \mid x \in \mathbb{R}\}$

0.2.2 集合的基本運算

設 A 、 B 、 C 為三個集合

1. 集合種類：

(1) 空集合： $\emptyset = \{ \} = \{x \mid x \neq x\}$

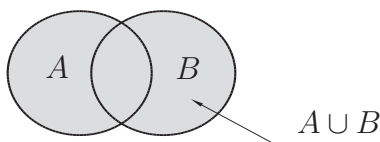
(2) 子集合 (subsets) (即部分集合)：若 $A \subset B$ ，唸成 A ”包含於” B ，或 A 為 B 的子集合 (subset)，則 A 中所有的元素，均屬於 B 。

(a) $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq C$ ，則 $A \subseteq C$

(b) $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$ ，則 $A = B$

2. 聯集 (Union) (全取的部分)： $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}$

用文氏圖 (Venn diagram) 表示如下：



(1) $x \in A \cup B$ 若且唯若 (if and only if) $x \in A$ 或 $x \in B$ 。

(2) $x \notin A \cup B$ 若且唯若 (if and only if) $x \notin A$ 且 $x \notin B$ 。

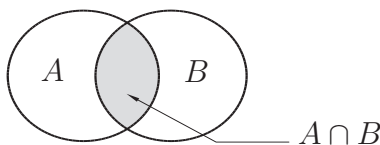
(3) $A \cup B = B \cup A$ 。(交換律)

(4) $A \cup B \cup C = A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ 。(結合律)

(5) $A \cup B = \emptyset$ 若且唯若 (if and only if) $A = B = \emptyset$ 。

3. 交集 (Intersection) (共同的部分)： $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}$

用文氏圖 (Venn diagram) 表示如下：



(1) $x \in A \cap B$ 若且唯若 (if and only if) $x \in A$ 且 $x \in B$ 。

(2) $x \notin A \cap B$ 若且唯若 (if and only if) $x \notin A$ 或 $x \notin B$ 。

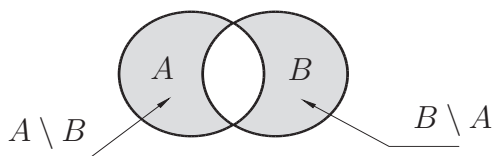
(3) $A \subseteq (A \cup B)$ ， $(A \cap B) \subseteq A$ 。

(4) $A \cap (A \cup B) = A$ ， $A \cup (A \cap B) = A$ 。

(5) $A \cup \emptyset = A$ ， $A \cap \emptyset = \emptyset$ 。

(6) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ 。(分配律)

4. 差集 (剩餘的部分) : 用文氏圖 (Venn diagram) 表示如下 :

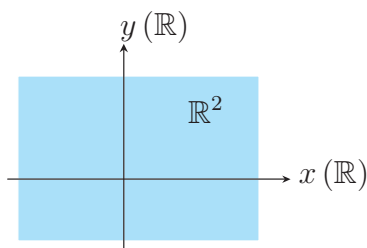


$$(1) A - B = A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$$

$$(2) B - A = B \setminus A = \{x \mid x \in B \text{ 且 } x \notin A\}$$

5. 積集 (創新的部分)

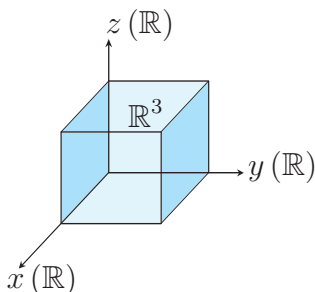
$$(1) \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\} \text{ 二維空間。}$$



$$(2) A \times B = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\} \neq B \times A$$

$$(4) [1, 2] \times [3, 4] = \{(x, y) \mid 1 \leq x \leq 2, 3 \leq y \leq 4\}$$

$$(5) \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\} \text{ 三維空間。}$$



$$(4) A \times B \times C = \{(x, y, z) \mid x \in A, y \in B, z \in C\}$$

0.3 函數

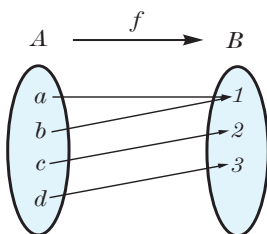
0.3.1 定義

設 A 、 B 是兩個非空集合，若對所有的 $\alpha \in A$ ，恰有一個 $\beta \in B$ 作為 α 的對應元素，則稱為從 A 映至 B 的一個函數，一般表成 $f: A \rightarrow B$ 。

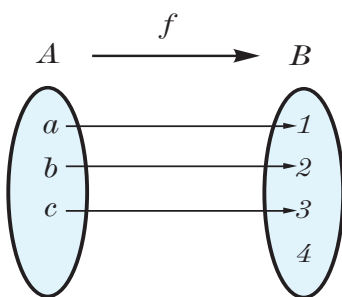
1. A 稱為函數的定義域 (domain)、 B 稱為函數的對應集合 (codomain)。

2. 定義域中的元素 α ($\alpha \in A$)，它所對應的元素 β ，稱為 α 的函數值或像 (image)，一般用 $f(\alpha)$ 來表示。

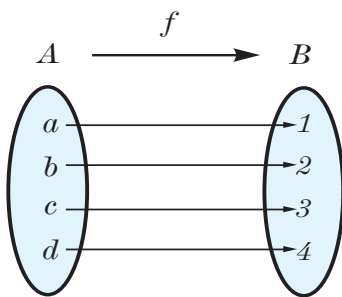
3. 集合 $\{f(\alpha) \mid \alpha \in A\}$ ，稱為函數 f 的值域 (range) 或像集 (image)，一般用 $f(A)$ 或 $R(f)$ 或 $Im(f)$ 來表示。
4. 函數 $f : A \rightarrow B$ ，且 $\forall \beta \in B$ 至少是一個 $\alpha \in A$ 的像，則稱 f 為映成 (onto) 函數或蓋射 (surjective)。



5. 函數 $f : A \rightarrow B$ ，對不同的 A 中元素，具有相異的 B 中元素對應時，則稱 f 為一對一 (one to one) 函數或嵌射 (injective)，記作 1-1 函數。



6. 若函數 $f : A \rightarrow B$ 為一對一映成時，則稱 f 為 1-1 映成函數或對射 (bijective)。函數要 1-1 映成才具有反函數。



7. $f : x \rightarrow y$ 亦可表示成 $y = f(x)$ 。 x 稱為函數 f 的自變數 (independent variable)， y 稱為函數 f 的因變數 (dependent variable)。

0.3.2 合成函數 (composite function)

1. 定義：(函數的變數為另外一個函數) 設 D 、 E 、 F 是三個非空集合，且

$$g : D \rightarrow E \quad ; \quad f : E \rightarrow F$$

是二個函數，若函數 $h : D \rightarrow F$ 定義成 $h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$ 則函數 h 稱為函數 f 與函數 g 的合成函數。

2. 推廣： $h(x) = (f \circ g \circ u)(x) = f(g(u(x)))$

0.3.3 反函數 (inverse function)

1. 定義：設函數為 $f: x \rightarrow y$ 或 $y = f(x)$ ，在區間 $[a, b]$ 中為 1-1 映成函數，則 f 的反函數可定義成 $f^{-1}: y \rightarrow x$ 或 $x = f^{-1}(y)$ 。
2. cancellation equations: $f^{-1}(f(x)) = x$ 、 $f(f^{-1}(y)) = y$ 。

0.3.4 多項式 (Polynomial) 與分式 (Rational algebraic function)

1. 多項式的定義：多項式 $f(x)$ 乃是變數 x 的非負整數次幂，有限項的線性組合。多項式 $f(x)$ 中變數 x 最高次的次數，稱為多項式 $f(x)$ 的次數，以 $\deg\{f(x)\}$ 來表示。
2. 多項式 $f(x) = g(x)$ ：

- (1) $f(x)$ 與 $g(x)$ 所對應的同次項係數相等。
- (2) 任意的 x 值代入，則 $f(x)$ 與 $g(x)$ 等值。

3. 常見的因式分解：

- (1) $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$
- (2) $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$
- (3) $x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1})$

推論：常用的有理化公式： $\sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{a - b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$ ， $\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b} = \frac{a - b}{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}}$

4. 二項式定理：

- (1) $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
- (2) $(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$
- (3) $(1 + x)^n = C_0^n + C_1^n x + C_2^n x^2 + \cdots + C_n^n x^n$ ； $(n \in \mathbb{N})$
其中 $C_m^n = \frac{n!}{(n-m)!m!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{m!}$

5. 分式的定義：設 $P(x)$ 、 $Q(x)$ 為多項式，則分式(有理式) 定義成 $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ 。

- (1) 當 $\deg\{P(x)\} \geq \deg\{Q(x)\}$ 時，即分子的次數不小於分母的次數時，分式 $f(x)$ 稱為假分式。假分式可經由長除法化成帶分式。($\deg\{P(x)\}$ 為 $P(x)$ 的次數)
- (2) 當 $\deg\{P(x)\} < \deg\{Q(x)\}$ 時，即分子的次數小於分母的次數時，分式 $f(x)$ 稱為真分式。

0.3.5 指數 (exponential) 與對數函數 (logarithmic function)

1. 指數律：設 $m, n \in \mathbb{Z}$, a, b 為非零之實數，定義 $a^0 = 1$ (0^0 無定義) 及 $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ ，則

$$(1) a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}。$$

$$(2) (a^m)^n = a^{mn}, (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n。$$

$$(3) \sqrt[n]{a^n} = a^{\frac{n}{n}}, \text{ 其中 } (a > 0)。$$

2. 若 $a > 0$ 且 $a \neq 1$, $x \in \mathbb{R}$, 則 $f(x) = a^x$ 稱為以 a 為底的指數函數，且亦滿足指數律。

3. 以 a 為底的指數函數 a^x 的反函數，稱為以 a 為底的對數函數記為 $\log_a$ ，即 $y = a^x \Rightarrow x = \log_a y$ ，其中 y 稱為真數。

4. 對數函數之基本運算：設 $a, b > 0$; $a, b \neq 1$, $x > 0$, $y > 0$

$$(1) \log_e x = \ln x, \text{ 其中 } e = 2.71828182845904523536 \dots$$

$$(2) a^{\log_a x} = x, \log_a(a^x) = x, e^{\ln x} = x, \ln(e^x) = x$$

$$(3) a^x = e^{\ln(a^x)}$$

$$(4) \ln e = 1, \ln 1 = 0, \ln 0^+ = -\infty, \ln \infty = \infty$$

$$(5) \ln(xy) = \ln x + \ln y; \ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y$$

$$(6) \ln x^p = p \ln x; (p \in \mathbb{R})$$

$$(7) \log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}; (\text{換底})$$

0.3.6 三角函數

1. 三角函數的定義

(1) 單位圓

