

喻超凡老師的家

超凡小鋪網址：<http://www.pcstore.com.tw/superyu>



工數神父喻超凡 Facebook 網址：
<http://www.facebook.com/mathsuperyu>



喻超凡雲端翻轉數學教室：<http://www.superyu.idv.tw>



序

線性代數它為抽象代數中的一環，其涵蓋的範圍相當廣泛，而這門課程又是電機、自控（含機械自控）、通訊、光電...等科系在專業科目中重要的分析工具，同時也為研究所入學考試中必考的學科。因為它具有抽象的概念，所以一般非數學系的同學，因為純數的理論基礎不夠紮實，因而在學習上常有很多的困擾，進而產生了嚴重挫折感，甚至放棄了這門學科，誠屬可惜。因此喻超凡博士將其多年教授線性代數的心得及上課精華，有系統的以結構化的方式，有條不紊的彙整成一冊電機類科專用的線性代數理論與問題集，以期能為眾多的莘莘學子們，在短時間內對線性代數作全盤性的認識與了解，重振同學對線性代數的信心。

最後喻超凡博士將線性代數中重要理論的定義、定理、公式的來源，及發展的過程和重要的數學家的生平事蹟...等等的參考文獻，以註腳的方式加於各章節中，以增加閱讀本書的趣味性，進而使讀者能在趣味中了解線性代數的發展過程及整體的全貌。同時喻超凡博士亦有架設網路學校，網路學校的網址為 <http://www.superyu.idv.tw>。

本書雖經多次修定及校對，但仍難免有所疏漏之處，敬請各位讀者不吝賜教。本書已獲全國各大補習班及學校採用為教科書，筆者在此致最大的謝意。



喻超凡雲端教室

喻超凡

2020. 4.

目錄

1	矩陣	1
1.1	矩陣基本代數運算	1
1.1.1	基本名詞	1
1.1.2	矩陣的運算	3
1.1.3	其他特殊矩陣的定義	7
1.2	行列式 (Determinant) 及其應用	26
1.2.1	行列式的定義	26
1.2.2	行列式的性質	27
1.2.3	反矩陣的求法	30
1.3	矩陣的秩 (Rank) 及聯立方程式的解	51
1.3.1	矩陣的秩	51
1.3.2	聯立方程式的解	52
1.3.3	Cramer rule	53
1.4	特徵值與特徵向量	73
1.5	相似轉換	107
1.5.1	矩陣對角化	107
1.5.2	Jordan Canonical form	107
1.6	矩陣相似轉換的應用	125
1.6.1	解方陣函數	125
1.6.2	利用Jordan form 求方陣函數	127
1.6.3	解一階常係數齊次聯立 ODE	128
1.6.4	解二階常係數齊次聯立 ODE	129
1.6.5	相似轉換解常係數聯立 ODE	130
1.7	Cayley–Hamilton 定理與最小多項式	174
1.7.1	Cayley–Hamilton 定理	174
1.7.2	最小多項式	176
1.8	二次式及其應用	187
1.8.1	Gram-Schmidt 正交化	187

1.8.2	厄米特 (Hermitian) 矩陣的性質	188
1.8.3	實數二次式 (Real quadratic form)	189
1.8.4	廣義的特徵值系統 $AX = \lambda BX$	191
2	向量空間	213
2.1	一般代數結構	213
2.2	向量空間 (Vector Spaces)	215
2.3	子空間 (Subspaces)	218
2.3.1	概論	218
2.3.2	生成空間 (Spanning)	220
2.3.3	直和 (Direct sum)	221
2.3.4	矩陣的列空間、行空間、零核空間	222
2.4	向量空間的基底 (Bases)	250
2.4.1	線性獨立與線性相依 (Linear Independent and Linear dependent)	250
2.4.2	基底與維數 (Bases and Dimension)	253
3	線性變換 (Transformations)	305
3.1	概論	305
3.2	線性變換的矩陣表示法	331
3.2.1	概論	331
3.2.2	合成變換 (composition of linear transformations)	334
3.2.3	左乘變換	335
3.2.4	逆變換 (inverse transformation) 與同構變換 (isomorphism)	336
3.2.5	基底轉換 (Change of Basis)	337
3.2.6	結論 (conclusion)	339
3.3	特徵值系統與對角化	386
3.4	Jordan Canonical form	428
4	內積空間	451
4.1	概論	451
4.1.1	內積	451
4.1.2	範數 (norm) 及正交集	453
4.1.3	Gram-Schmidt 正交化	455
4.1.4	QR 分解 (QR - Decompositions or QR - Factorization)	456
4.2	正交投影與最小二乘方	496
4.2.1	正交投影 (Orthogonal Projection)	496
4.2.2	最小二乘方 (Least Squares)	500

4.3	伴隨(Adjoint) 運算子	565
4.3.1	概論	565
4.3.2	正規(normal) 及自我伴隨 (self-adjoint) 運算子	566
4.3.3	么正(unitary) 及正交 (orthogonal) 運算子	567
4.4	二次式 (Quadratic Forms)	588
附 錄		617
A	廣義反矩陣(pseudoinverse)	617
A.1	Singular value decomposition	617
A.2	Full rank Decomposition	620
A.3	廣義反矩陣	621
B	矩陣的LU 分解	645
C	Householder 矩陣	657
D	幂等矩陣(idempotent matrix)	669
E	聯立方程式的解	675
E.1	矩陣 rank 的性質	675
E.2	聯立方程式的解	676
F	嚴選是非題題庫	683
	參考文獻	822

第 1 章 矩陣

1.1 矩陣基本代數運算

1.1.1 基本名詞

1. 列矩陣 (Row matrix)

$$A_{1 \times n} = [a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n]_{1 \times n}$$

2. 行矩陣 (Column matrix)

$$A_{n \times 1} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}_{n \times 1}$$

3. 方形矩陣 (Square matrix)

$$A_{n \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n \times n}$$

4. 上三角矩陣 (Upper triangular matrix)

$$U_{n \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n \times n}$$

5. 下三角矩陣 (Lower triangular matrix)

$$L_{n \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n \times n}$$

6. 對角線矩陣 (Diagonal matrix)

$$D_{n \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n \times n}$$

7. 零矩陣 (Null matrix)

$$N_{m \times n} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{m \times n}$$

8. 子矩陣 (Submatrix)

例如： $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & 0 \end{bmatrix}$ ，則 $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ 、 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ 、 $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$... 稱爲 A 的子矩陣。

9. 主子矩陣 (Principle submatrix)

對角線元素爲原矩陣對角線元素之子矩陣稱爲矩陣的主子矩陣。例如：

$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & 0 \end{bmatrix}$ ，則 $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ 、 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ 、 $\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$ 、 $[1]$ 、 $[5]$ 、 $[0]$ 稱爲 A 的主子矩陣。

10. 列梯形矩陣 (row echelon form matrix)*

若矩陣 A 中列的第一個非零元素以前零的元素數目呈逐列增加，直到整列全爲零爲止，則此矩陣稱爲列梯形矩陣。同時每列中第一個非爲零的元素，稱爲列梯形矩陣 A 的區別元素 (distinguished element or pivot)。

例如： $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 、 $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 均爲列梯形矩陣。

*row echelon matrix 及 reduced row echelon matrix 的定義，本書是參考 Lawrence E. Spence, Arnold J. Insel, Stephen H. Friedberg, *Elementary Linear Algebra A Matrix Approach*, second Edition, pp.33, ISBN 0-13-158034-5. 讀者亦可參考 Erwin Kreyszig, *Advanced Engineering Mathematics*, Tenth Edition, pp.279, ISBN 978-0-470-45836-5. 但有些的課本 row echelon matrix 還要求 pivot 要等於 1, 如 Steven J. Leon, *Linear Algebra with Application*, Eighth Edition, pp.13, ISBN 13: 978-0-13-600929-0.

11. 最簡列梯形矩陣 (reduced row echelon form matrix)

列梯形矩陣若其區別元素滿足

(1) 每一個區別元素是他們所在的行中唯一的非零元素。

(2) 每一個區別元素皆為 1。

則該列梯形矩陣稱為最簡列梯形矩陣。例如：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1.1.2 矩陣的運算

1. 相等 (equal)

設 $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ 、 $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ ，若 $A = B$ ，則 $a_{ij} = b_{ij}$ 。

2. 相加 (add)

(1) 定義：

設 $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ 、 $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ 、 $C = [c_{ij}]_{m \times n}$ ，若 $C = A + B$ ，則
 $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

(2) 性質：

(a) $A + B = B + A$

(b) $(A + B) + C = A + (B + C)$

(c) $A + (-A) = 0$

(d) $A + 0 = A$

3. 相乘 (multiple)

(1) 純量與矩陣相乘

設 $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ 且 α 為純量，則 $\alpha A = [\alpha a_{ij}]_{m \times n}$ ，即 A 中每一個元素均乘上 α 。

(2) 二矩陣相乘

設 $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ 、 $B = [b_{ij}]_{n \times p}$ 、 $C = [c_{ij}]_{m \times p}$ ，若 $C = A \times B$ ，則

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj} \quad ; \quad \begin{cases} i = 1, 2, \dots, m \\ j = 1, 2, \dots, p \end{cases}$$

(3) 分割矩陣的乘法

(a) 設矩陣為

$$A_{m \times n} = [A_1 \ A_2 \ \cdots \ A_n]$$

其中 A_i 表示矩陣 A 第 i 行的行向量，且

$$X_{n \times 1} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

則

$$AX = x_1A_1 + x_2A_2 + \cdots + x_nA_n$$

(b) 設矩陣為

$$A_{m \times n} = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix}$$

其中 A_i 表示矩陣 A 第 i 列的列向量，且

$$X_{1 \times m} = [x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_m]$$

則

$$XA = x_1A_1 + x_2A_2 + \cdots + x_mA_m$$

(c) 設矩陣 A 、 B 可表示成

$$A_{m \times p} = \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array} \right] \quad , \quad B_{p \times n} = \left[\begin{array}{c|c} B_{11} & B_{12} \\ \hline B_{21} & B_{22} \end{array} \right]$$

其中 A_{ij} 、 B_{ij} 為 A 及 B 的分割矩陣，且矩陣相乘的部分均成立時，則

$$\begin{aligned} AB &= \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} B_{11} & B_{12} \\ \hline B_{21} & B_{22} \end{array} \right] \\ &= \left[\begin{array}{cc} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{array} \right] \end{aligned}$$

(4) 性質：

(a) $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$ 。

(b) $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$ 。

(c) $A \times B$ 不一定等於 $B \times A$ 。

(d) $A \times B = 0$ 不一定 $A = 0$ 或 $B = 0$ 。

4. 轉置 (transpose) 矩陣行列對調

(1) 定義：

設 $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ ，則 $A^T = [a_{ji}]_{n \times m}$ 。

(2) 性質：

(a) $(A^T)^T = A$

(b) $(A \times B)^T = B^T \times A^T$

(c) $(A \times B \times C)^T = C^T \times B^T \times A^T$

(d) $(A + B)^T = A^T + B^T$

(e) $(\alpha A)^T = \alpha A^T$ (α 為純量)

5. 共軛 (conjugate)

設 $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ ，則 $\bar{A} = [\bar{a}_{ij}]_{m \times n}$ 。

6. 共軛轉置 (conjugate transpose)

(1) 定義*：

設 $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ ，則 $\bar{A}^T = A^H = A^* = A^\dagger = [\bar{a}_{ji}]_{n \times m}$ 。

(2) 性質：

* A^\dagger 唸成 A dagger，普遍用於量子力學 (quantum mechanics) 中。

(a) $(A^*)^* = A$

(b) $(A \times B)^* = B^* \times A^*$

(c) $(A + B)^* = A^* + B^*$

(d) $(\alpha A)^* = \bar{\alpha} A^*$ (α 為純量)

7. 方陣乘冪 (power)

設 $A = [a_{ij}]_{n \times n}$, 則 $A^2 = A \times A$ 、 $A^k = A^{k-1} \times A$ 。

8. 方陣的跡數 (trace) 方陣所有對角線元素的和

(1) 定義：

設 A 為 $n \times n$, 且 $A = [a_{ij}]$, 則其跡數定義成

$$tr(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

(2) 性質：設 A 、 B 均為 $n \times n$ 的方陣

(a) $tr(A \pm B) = tr(A) \pm tr(B)$

(b) $tr(\alpha A) = \alpha tr(A)$ (α 為純量)

(c) $tr(A^T) = tr(A)$

(d) $tr(A^*) = \overline{tr(A)}$

(e) $tr(A \times B) = tr(B \times A)$ (只要 AB 、 BA 為方陣即可)

(f) $tr(B^{-1}AB) = tr(A)$

9. 基本列 (行) 運算 (elementary row(column) operations)

(1) 矩陣中某兩列 (行) 互調運算

以符號 R_{ij} 表示矩陣中第 i 列與第 j 列相互對調運算。

以符號 C_{ij} 表示矩陣中第 i 行與第 j 行相互對調運算。

$$\text{例：} R_{12} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & e & f \\ a & b & c \end{pmatrix}; C_{23} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c & b \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

(2) 矩陣中第 i 列 (行) 乘上純量 k 的運算

以符號 $R_i^{(k)}$ 表示矩陣中第 i 列乘上純量 k 的運算。

以符號 $C_i^{(k)}$ 表示矩陣中第 i 行乘上純量 k 的運算。

$$\text{例：} R_1^{(k)} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka & kb & kc \\ d & e & f \end{pmatrix}; C_2^{(k)} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & kb & c \\ d & ke & f \end{pmatrix}$$

(3) 矩陣中某列 (行) 乘上純量 k 加到另一列 (行) 的運算

以符號 $R_{ij}^{(k)}$ 表示矩陣中第 i 列乘上純量 k 加到第 j 列的運算。

以符號 $C_{ij}^{(k)}$ 表示矩陣中第 i 行乘上純量 k 加到第 j 行的運算。

$$\text{例：} R_{12}^{(k)} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ ka+d & kb+e & kc+f \end{pmatrix};$$

$$C_{23}^{(k)} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & kb+c \\ d & e & ke+f \end{pmatrix}$$

1.1.3 其他特殊矩陣的定義

1. 單位矩陣 (Unit matrix)

(1) 加法單位矩陣：

設 $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ 、 $O = [0_{ij}]_{m \times n}$ ，因

$$A + O = O + A = A$$

故 $O = [0_{ij}]_{m \times n}$ 稱為 A 的加法單位矩陣。

(2) 乘法單位矩陣：

設 $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ ，且 $I = [\delta_{ij}]_{n \times n}$ ，其中 δ_{ij} 稱為 Kronecker delta (克洛涅克 delta) 函數，即 $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & ; i = j \\ 0 & ; i \neq j \end{cases}$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$)，因此

$$I_{n \times n} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

故

$$\begin{cases} A_{m \times n} \times I_{n \times n} = A_{m \times n} & ; \text{稱 } I_{n \times n} \text{ 爲右單位矩陣} \\ I_{m \times m} \times A_{m \times n} = A_{m \times n} & ; \text{稱 } I_{m \times m} \text{ 爲左單位矩陣} \end{cases}$$

習慣上所稱的單位矩陣是指乘法單位矩陣。

2. 反矩陣 (Inverse matrix)

(1) 加法反矩陣：設 $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ ，因

$$A + (-A) = (-A) + A = 0_{m \times n}$$

故 $(-A) = [-a_{ij}]_{m \times n}$ 稱爲 A 的加法反矩陣。

(2) 乘法反矩陣

(a) 若 $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ ，而且 $R = [r_{ij}]_{n \times m}$ ，會使得 $A \times R = I_{m \times m}$ ，則 R 稱爲 A 的右反矩陣。

(b) 若 $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ ，而且 $L = [\ell_{ij}]_{n \times m}$ ，會使得 $L \times A = I_{n \times n}$ ，則 L 稱爲 A 的左反矩陣。

(c) 若 $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ ，而且 $X = [x_{ij}]_{n \times m}$ ，會使得 $X \times A = I_{n \times n}$ 及 $A \times X = I_{m \times m}$ 時，則 X 稱爲 A 的兩邊反矩陣 (two-sided inverse)。

(d) 方陣 $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ ，滿足 $A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = I_{n \times n}$ 時，則 A^{-1} 稱爲 A 的反矩陣。

(e) 習慣上所稱的反矩陣是指方陣的乘法反矩陣。

3. 基本矩陣 (elementary matrix)

單位矩陣 $I_{n \times n}$ 經由一次的基本列 (行) 運算，所得到的新矩陣，稱爲基本矩陣。

(1) 定義：

- (a) 單位矩陣 I 的第 i 列與第 j 列互調，所得到的基本矩陣一般以符號 Er_{ij} 來表示，即 $Er_{ij} = R_{ij}(I)$ 。
- (b) 單位矩陣 I 的第 i 行與第 j 行互調，所得到的基本矩陣一般以符號 Ec_{ij} 來表示，即 $Ec_{ij} = C_{ij}(I)$ 。
- (c) 單位矩陣 I 的第 i 列乘上純量 k ，所得到的基本矩陣一般以符號 $Er_i^{(k)}$ 來表示，即 $Er_i^{(k)} = R_i^{(k)}(I)$ 。
- (d) 單位矩陣 I 的第 i 行乘上純量 k ，所得到的基本矩陣一般以符號 $Ec_i^{(k)}$ 來表示，即 $Ec_i^{(k)} = C_i^{(k)}(I)$ 。
- (e) 單位矩陣 I 的第 i 列乘上純量 k 加到第 j 列，所得到的基本矩陣一般以符號 $Er_{ij}^{(k)}$ 來表示，即 $Er_{ij}^{(k)} = R_{ij}^{(k)}(I)$ 。
- (f) 單位矩陣 I 的第 i 行乘上純量 k 加到第 j 行，所得到的基本矩陣一般以符號 $Ec_{ij}^{(k)}$ 來表示，即 $Ec_{ij}^{(k)} = C_{ij}^{(k)}(I)$ 。

(2) 性質：設 A 為 $n \times m$ 的矩陣

- (a) $R_{ij}(A) = Er_{ij} \times A$
- (b) $C_{ij}(A) = A \times Ec_{ij}$
- (c) $R_i^{(k)}(A) = Er_i^{(k)} \times A$
- (d) $C_i^{(k)}(A) = A \times Ec_i^{(k)}$
- (e) $R_{ij}^{(k)}(A) = Er_{ij}^{(k)} \times A$
- (f) $C_{ij}^{(k)}(A) = A \times Ec_{ij}^{(k)}$

(3) 反矩陣性質：每一個基本矩陣皆為可逆，且其反矩陣亦為一基本矩陣。

- (a) $(Er_{ij})^{-1} = Er_{ij}$ (因 $Er_{ij}Er_{ij} = I$)
- (b) $(Ec_{ij})^{-1} = Ec_{ij}$
- (c) $(Er_i^{(k)})^{-1} = Er_i^{(1/k)}$; $k \neq 0$ (因 $Er_i^{(k)}Er_i^{(1/k)} = I$)

$$(d) (Ec_i^{(k)})^{-1} = Ec_i^{(1/k)} ; k \neq 0$$

$$(e) (Er_{ij}^{(k)})^{-1} = Er_{ij}^{(-k)} \quad (\text{因 } Er_{ij}^{(k)} Er_{ij}^{(-k)} = I)$$

$$(f) (Ec_{ij}^{(k)})^{-1} = Ec_{ij}^{(-k)}$$

4. 相當矩陣 (equivalent matrix)

矩陣 B 稱為矩陣 A 的相當矩陣 (equivalent matrix) 時，若且唯若存在兩個非奇異矩陣 P 、 Q 即 $|P| \neq 0$ 、 $|Q| \neq 0$ ，使得 $B = PAQ$ ，而此種轉換，亦稱為相當轉換。

5. 相似矩陣 (similar matrix)

當 $B = P^{-1}AP$ 時，稱為相似轉換 (similarity transformation)，而 B 稱為 A 的相似矩陣。若 B 為 A 的相似矩陣，則具有下列的性質

- (1) A 和 B 具有相同的行列式。
- (2) A 和 B 具有相同的 Rank。
- (3) A 和 B 具有相同的 Nullity。
- (4) A 和 B 具有相同的 trace。
- (5) A 和 B 具有相同的特徵多項式及最小多項。
- (6) A 和 B 具有相同的特徵值但特徵向量不一定相同。
- (7) A 和 B 具有相同的維數的特徵空間。

上面的所有性質均為逆定理不恆真。

6. 對稱矩陣 (Symmetric matrix)

設 A 為 $n \times n$ 的方陣，若 $A^T = A$ ，則稱 A 為對稱矩陣。