# 喻超凡老師的家

**超凡小鋪網址**: https://mall.iopenmall.tw/059897/index.php

iOPEN Mall超凡小鋪

蝦皮超凡小鋪

**喻超凡喻超弘** YouTube : https://YouTube.com/@supyu

喻超凡Instagram

喻超凡YouTube

**喻超凡雲端翻轉數學教室** : http://www.superyu.idv.tw

Line微積分群組

Line工數線代群組

喻超凡雲端教室

# 序

線性代數它為抽象代數的一環，其涵蓋的範圍相當廣泛，而這門課程又是電機、自控 (含機械自控)、通訊、光電 ... 等科系在專業科目中重要的分析工具，同時也為研究所入學考試必考的學科。因為它具有抽象的概念，所以一般非數學系的同學，因為純數的理論基礎不夠紮實，因而在學習上常有很多的困擾，進而產生了嚴重挫折感，甚至放棄了這門學科，誠屬可惜。因此喻超凡博士將多年教授線性代數的心得及上課精華，有系統的以結構化的方式, 有條不紊的彙整成一冊, 電機類科專用的線性代數理論與問題集，以期能為眾多的莘莘學子們，在短時間內對線性代數作全盤性的認識與了解，重振同學對線性代數的信心。

最後喻超凡博士將線性代數中重要理論的定義、定理、公式的來源, 及發展的過程和重要的數學家生平事蹟... 等等參考文獻, 以註腳的方式加於各章節中, 以增加閱讀本書的趣味性, 進而使讀者能在趣味中了解線性代數的發展過程及整體的全貌。

本書雖經多次修定及校對, 但仍難免有所疏漏之處, 敬請各位讀者不吝賜教，勘誤網址 http://www.superyu.idv.tw。本書已獲全國各大補習班及學校採用為教科書, 筆者在此致最大的謝意。

喻超凡博士的 YouTube 頻道為 https://YouTube.com/@supyu，歡迎讀者前往觀賞工程數學、線性代數、微積分的影片。

喻超凡 YouTube

https://YouTube.com/@supyu

喻超凡

2020. 4.

# 目錄


**1 矩陣** **1**

1.1 **矩陣基本代數運算** . . . . . 1

1.1.1 基本名詞 . . . . . 1

1.1.2 矩陣的運算 . . . . . 3

1.1.3 其他特殊矩陣的定義 . . . . . 7

1.2 **行列式** (Determinant) **及其應用** . . . . . 26

1.2.1 行列式的定義 . . . . . 26

1.2.2 行列式的性質 . . . . . 27

1.2.3 反矩陣的求法 . . . . . 30

1.3 **矩陣的秩** (Rank) **及聯立方程式的解** . . . . . 51

1.3.1 矩陣的秩 . . . . . 51

1.3.2 聯立方程式的解 . . . . . 52

1.3.3 Cramer rule . . . . . 53

1.4 **特徵值與特徵向量** . . . . . 73

1.5 **相似轉換** . . . . . 107

1.5.1 矩陣對角化 . . . . . 107

1.5.2 Jordan Canonical form . . . . . 107

1.6 **矩陣相似轉換的應用** . . . . . 125

1.6.1 解方陣函數 . . . . . 125

1.6.2 利用Jordan form 求方陣函數 . . . . . 127

1.6.3 解一階常係數齊次聯立 ODE . . . . . 128

1.6.4 解二階常係數齊次聯立 ODE . . . . . 129

1.6.5 相似轉換解常係數聯立 ODE . . . . . 130

1.7 Cayley–Hamilton **定理與最小多項式** . . . . . 174

1.7.1 Cayley–Hamilton 定理 . . . . . 174

1.7.2 最小多項式(The Minimal Polynomial) . . . . . 176

1.8 **二次式及其應用** . . . . . 187

1.8.1 Gram-Schmidt 正交化 . . . . . 187

1.8.2 厄米特 (Hermitian) 矩陣的性質 . . . . . 188
1.8.3 實數二次式 (Real quadratic form) . . . . . 189
1.8.4 廣義的特徵值系統 $AX = \lambda BX$ . . . . . 191

**2 向量空間 213**
2.1 **一般代數結構** . . . . . 213
2.2 **向量空間**(Vector Spaces) . . . . . 215
2.3 **子空間**(Subspaces) . . . . . 218
2.3.1 概論 . . . . . 218
2.3.2 生成空間 (Spanning) . . . . . 220
2.3.3 直和 (Direct sum) . . . . . 221
2.3.4 矩陣的列空間、行空間、零核空間 . . . . . 222
2.4 **向量空間的基底**(Bases) . . . . . 250
2.4.1 線性獨立與線性相依(Linear Independent and Linear dependent) . 250
2.4.2 基底與維數(Bases and Dimension) . . . . . 253

**3 線性變換(Transformations) 305**
3.1 **概論** . . . . . 305
3.2 **線性變換的矩陣表示法** . . . . . 331
3.2.1 概論 . . . . . 331
3.2.2 合成變換(composition of linear transformations) . . . . . 334
3.2.3 左乘變換 . . . . . 335
3.2.4 逆變換(inverse transformation) 與同構變換 (isomorphism) . . . . 336
3.2.5 基底轉換(Change of Basis) . . . . . 337
3.2.6 結論(conclusion) . . . . . 339
3.3 **特徵值系統與對角化** . . . . . 386
3.4 Jordan Canonical form . . . . . 428

**4 內積空間 451**
4.1 **概論** . . . . . 451
4.1.1 內積 . . . . . 451
4.1.2 範數(norm) 及正交集合 . . . . . 453
4.1.3 Gram–Schmidt 正交化 . . . . . 455
4.1.4 QR 分解 (QR - Decompositions or QR - Factorization) . . . . . 456
4.2 **正交投影與最小二乘方** . . . . . 496
4.2.1 正交投影(Orthogonal Projection) . . . . . 496
4.2.2 最小二乘方(Least Squares) . . . . . 500

4.3 **伴隨**(Adjoint) **運算子** . . . . . 565
4.3.1 概論 . . . . . 565
4.3.2 正規(normal) 及自我伴隨 (self–adjoint) 運算子 . . . . . 566
4.3.3 么正(unitary) 及正交 (orthogonal) 運算子 . . . . . 567
4.4 **二次式** (Quadratic Forms) . . . . . 588

**附 錄** **617**

**A 廣義反矩陣(pseudoinverse)** **617**
A.1 Singular value decomposition . . . . . 617
A.2 Full rank Decomposition . . . . . 620
A.3 **廣義反矩陣** . . . . . 621

**B 矩陣的LU 分解** **645**

**C Householder 矩陣** **657**

**D 冪等矩陣(idempotent matrix)** **669**

**E 聯立方程式的解** **675**
E.1 **矩陣** rank **的性質** . . . . . 675
E.2 **聯立方程式的解** . . . . . 676

**F 嚴選是非題題庫** **683**

參考文獻 **822**

# 第 1 章 矩陣

## 1.1 矩陣基本代數運算

### 1.1.1 基本名詞

**1.** 列矩陣 (Row matrix)

$$A_{1\times n} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix}_{1\times n}$$

**2.** 行矩陣 (Column matrix)

$$A_{n\times 1} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}_{n\times 1}$$

**3.** 方形矩陣 (Square matrix)

$$A_{n\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n}$$

**4.** 上三角矩陣 (Upper triangular matrix)

$$U_{n\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n}$$

**5.** 下三角矩陣 (Lower triangular matrix)

$$L_{n\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n}$$

**6.** 對角線矩陣 (Diagonal matrix) *

$$D_{n\times n}=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n}$$

**7.** 零矩陣 (Null matrix)

$$N_{m\times n}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{m\times n}$$

**8.** 子矩陣 (Submatrix)

例如：$A=\begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & 0 \end{bmatrix}$，則 $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$、$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$、$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}\cdots$ 稱爲 $A$ 的子矩陣。

**9.** 主子矩陣 (Principle submatrix)

對角線元素爲原矩陣對角線元素之子矩陣稱爲矩陣的主子矩陣。例如：

$A=\begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & 0 \end{bmatrix}$，則 $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$、$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$、$\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$、$[1]$、$[5]$、$[0]$
稱爲 $A$ 的主子矩陣。

**10.** 列梯形矩陣 (row echelon form matrix)

若矩陣 $A$ 中列的第一個非零元素以前零的元素數目呈逐列增加，直到整列全爲零爲止，則此矩陣稱爲列梯形矩陣。同時每列中第一個非爲零的元素，稱爲列梯形矩陣 $A$ 的區別元素 (distinguished element or pivot)。

例如：$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$、$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 均爲列梯形矩陣。

---

*上三角矩陣、下三角矩陣、對角線矩陣不一定要方陣, An $m\times n$ matrix $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ is said to be upper triangular matrix if $a_{ij}=0$ for $i>j$ and lower triangular matrix if $a_{ij}=0$ for $i<j$. If $a_{ij}=0$ whenever $i\geq j$, then $A$ is said to be strictly upper triangular matrix. If $a_{ij}=0$ whenever $i\neq j$, then $A$ is said to be diagonal matrix. 讀者可參考 Roger A. Horn, Charles R. Johnson "Matrix Analysis", Second Edition, pp.30–pp.31, ISBN 978-0-521-83940-2, 或 Stephen H. Friedberg, Arnold J. Insel, Lawrence E. Spence, *Linear Algebra*, 4th Edition, pp.21, ISBN: 978-1-292-02650-3.

**11.** 最簡列梯形矩陣 (reduced row echelon form matrix) *

列梯形矩陣若其區別元素滿足

(1) 每一個區別元素是他們所在的行中唯一的非零元素。

(2) 每一個區別元素皆爲 1。

則該列梯形矩陣稱爲最簡列梯形矩陣。例如：$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

### 1.1.2 矩陣的運算

**1.** 相等 (equal)

設 $A = [a_{ij}]_{m\times n}$、$B = [b_{ij}]_{m\times n}$，若 $A = B$，則 $a_{ij} = b_{ij}$。

**2.** 相加 (add)

**(1)** 定義：

設 $A = [a_{ij}]_{m\times n}$、$B = [b_{ij}]_{m\times n}$、$C = [c_{ij}]_{m\times n}$，若 $C = A + B$, 則 $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

**(2)** 性質：

**(a)** $A + B = B + A$

**(b)** $(A + B) + C = A + (B + C)$

**(c)** $A + (-A) = 0$

**(d)** $A + 0 = A$

**3.** 相乘 (multiple)

**(1)** 純量與矩陣相乘

設 $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ 且 $\alpha$ 爲純量, 則 $\alpha A = [\alpha a_{ij}]_{m\times n}$，即 $A$ 中每一個元素均乘上 $\alpha$。

*row echelon matrix 及 reduced row echelon matrix 的定義, 本書是參考 Lawrence E. Spence, Arnold J. Insel, Stephen H. Friedberg, *Elementrary Linear Algebra A Matrix Approach*, second Edition, pp.33, ISBN 0-13-158034-5. 讀者亦可參考 Erwin Kreyszig, *Advanced Engineering Mathematics*, Tenth Edition, pp.279, ISBN 978-0-470-45836-5. 但有些的課本 row echelon matrix 還要求 pivot 要等於1, 如 Steven J. Leon, *Linear Algebra with Application*, Eighth Edition, pp.13, ISBN 13: 978-0-13-600929-0.

**(2)** 二矩陣相乘

設 $A=[a_{ij}]_{m\times n}$、$B=[b_{ij}]_{n\times p}$、$C=[c_{ij}]_{m\times p}$，若 $C=A\times B$，則

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}\quad ;\ \begin{cases} i=1\,,\,2\,,\,\cdots m \\ j=1\,,\,2\,,\,\cdots p \end{cases}$$

**(3)** 分割矩陣的乘法

**(a)** 設矩陣爲

$$A_{m\times n}=[\,A_1\ \ A_2\ \cdots\ A_n\,]$$

其中 $A_i$ 表示矩陣 $A$ 第 $i$ 行的行向量，且

$$X_{n\times 1}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

則

$$AX=x_1A_1+x_2A_2+\cdots+x_nA_n$$

**(b)** 設矩陣爲

$$A_{m\times n}=\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix}$$

其中 $A_i$ 表示矩陣 $A$ 第 $i$ 列的列向量，且

$$X_{1\times m}=[\,x_1\ \ x_2\ \cdots\ x_m\,]$$

則

$$XA=x_1A_1+x_2A_2+\cdots+x_mA_m$$

**(c)** 設矩陣 $A$、$B$ 可表示成

$$A_{m\times p}=\left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right]\quad 、\quad B_{p\times n}=\left[\begin{array}{c|c} B_{11} & B_{12} \\ \hline B_{21} & B_{22} \end{array}\right]$$

其中 $A_{ij}$、$B_{ij}$ 爲 $A$ 及 $B$ 的分割矩陣，且矩陣相乘的部分均成立時，則

$$\begin{aligned} AB &= \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} B_{11} & B_{12} \\ \hline B_{21} & B_{22} \end{array}\right] \\ &= \begin{bmatrix} A_{11}B_{11}+A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12}+A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11}+A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12}+A_{22}B_{22} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

**(4)** 性質：

**(a)** $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$ 。

**(b)** $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$ 。

**(c)** $A \times B$ 不一定等於 $B \times A$ 。

**(d)** $A \times B = 0$ 不一定 $A = 0$ 或 $B = 0$ 。

**4.** 轉置 (transpose) 矩陣行列對調

**(1)** 定義:

設 $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ , 則 $A^T = [a_{ji}]_{n\times m}$ 。

**(2)** 性質：

**(a)** $(A^T)^T = A$

**(b)** $(A \times B)^T = B^T \times A^T$

**(c)** $(A \times B \times C)^T = C^T \times B^T \times A^T$

**(d)** $(A + B)^T = A^T + B^T$

**(e)** $(\alpha A)^T = \alpha A^T$ ($\alpha$ 爲純量)

**5.** 共軛 (conjugate)

設 $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ , 則 $\overline{A} = [\overline{a_{ij}}]_{m\times n}$ 。

**6.** 共軛轉置 (conjugate transpose)

**(1)** 定義*：

設 $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ , 則 $\overline{A}^T = A^H = A^* = A^\dagger = [\overline{a}_{ji}]_{n\times m}$ 。

**(2)** 性質：

*$A^\dagger$ 唸成 $A$ dagger , 普遍用於量子力學 (quantum mechanics) 中 。

**(a)** $(A^*)^* = A$

**(b)** $(A \times B)^* = B^* \times A^*$

**(c)** $(A + B)^* = A^* + B^*$

**(d)** $(\alpha A)^* = \overline{\alpha} A^*$ ($\alpha$ 爲純量)

**7.** 方陣乘冪 (power)

設 $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ , 則 $A^2 = A \times A$ 、$A^k = A^{k-1} \times A$ 。

**8.** 方陣的跡數 (trace) 方陣所有對角線元素的和

**(1)** 定義 :

設 $A$ 爲 $n \times n$ , 且 $A = [a_{ij}]$, 則其跡數定義成

$$tr(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

**(2)** 性質 : 設 $A$ 、$B$ 均爲 $n \times n$ 的方陣

**(a)** $tr(A \pm B) = tr(A) \pm tr(B)$

**(b)** $tr(\alpha A) = \alpha\, tr(A)$ ($\alpha$ 爲純量)

**(c)** $tr(A^T) = tr(A)$

**(d)** $tr(A^*) = \overline{tr(A)}$

**(e)** $tr(A \times B) = tr(B \times A)$ ( 只要 $AB$ 、$BA$ 爲方陣即可 )

**(f)** $tr(B^{-1}AB) = tr(A)$

**9.** 基本列 (行) 運算 (elementary row(column) operations)

**(1)** 矩陣中某兩列 (行) 互調運算

以符號 $R_{ij}$ 表示矩陣中第 $i$ 列與第 $j$ 列相互對調運算 。

以符號 $C_{ij}$ 表示矩陣中第 $i$ 行與第 $j$ 行相互對調運算。

例：$R_{12}\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & e & f \\ a & b & c \end{pmatrix}$；$C_{23}\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c & b \\ d & f & e \end{pmatrix}$

**(2)** 矩陣中第 $i$ 列 (行) 乘上純量 $k$ 的運算

以符號 $R_i^{(k)}$ 表示矩陣中第 $i$ 列乘上純量 $k$ 的運算。

以符號 $C_i^{(k)}$ 表示矩陣中第 $i$ 行乘上純量 $k$ 的運算。

例: $R_1^{(k)}\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka & kb & kc \\ d & e & f \end{pmatrix}$；$C_2^{(k)}\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & kb & c \\ d & ke & f \end{pmatrix}$

**(3)** 矩陣中某列 (行) 乘上純量 $k$ 加到另一列 (行) 的運算

以符號 $R_{ij}^{(k)}$ 表示矩陣中第 $i$ 列乘上純量 $k$ 加到第 $j$ 列的運算。

以符號 $C_{ij}^{(k)}$ 表示矩陣中第 $i$ 行乘上純量 $k$ 加到第 $j$ 行的運算。

例: $R_{12}^{(k)}\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ ka+d & kb+e & kc+f \end{pmatrix}$；

$C_{23}^{(k)}\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & kb+c \\ d & e & ke+f \end{pmatrix}$

### 1.1.3 其他特殊矩陣的定義

**1.** 單位矩陣 (Unit matrix)

**(1)** 加法單位矩陣：

設 $A = [\,a_{ij}\,]_{m\times n}$、$O = [\,0_{ij}\,]_{m\times n}$，因

$$A + O = O + A = A$$

故 $O = [\,0_{ij}\,]_{m\times n}$ 稱爲 $A$ 的加法單位矩陣。

**(2)** 乘法單位矩陣：

設 $A=[\,a_{ij}\,]_{m\times n}$ , 且 $I=[\,\delta_{ij}\,]_{n\times n}$ , 其中 $\delta_{ij}$ 稱爲 Kronecker delta (克洛涅克 delta) 函數, 即 $\delta_{ij}=\begin{cases}1 & ;i=j\\ 0 & ;i\neq j\end{cases}$ $(i\,,\,j=1\,,\,2\,,\,\cdots\,,\,n)$ , 因此

$$I_{n\times n}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}$$

故

$$\begin{cases}A_{m\times n}\times I_{n\times n}=A_{m\times n} & ;\text{稱 } I_{n\times n} \text{ 爲右單位矩陣}\\ I_{m\times m}\times A_{m\times n}=A_{m\times n} & ;\text{稱 } I_{m\times m} \text{ 爲左單位矩陣}\end{cases}$$

習慣上所稱的單位矩陣是指乘法單位矩陣。

**2.** 反矩陣 (Inverse matrix)

**(1)** 加法反矩陣：設 $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ , 因

$$A+(-A)=(-A)+A=0_{m\times n}$$

故 $(-A)=[-a_{ij}]_{m\times n}$ 稱爲 $A$ 的加法反矩陣。

**(2)** 乘法反矩陣

**(a)** 若 $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ , 而且 $R=[r_{ij}]_{n\times m}$ , 會使得 $A\times R=I_{m\times m}$ , 則 $R$ 稱爲 $A$ 的右反矩陣。

**(b)** 若 $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ , 而且 $L=[\ell_{ij}]_{n\times m}$ , 會使得 $L\times A=I_{n\times n}$ , 則 $L$ 稱爲 $A$ 的左反矩陣。

**(c)** 若 $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ , 而且 $X=[x_{ij}]_{n\times m}$ , 會使得 $X\times A=I_{n\times n}$ 及 $A\times X=I_{m\times m}$ 時 , 則 $X$ 稱爲 $A$ 的兩邊反矩陣 (two-sided inverse)。

**(d)** 方陣 $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ , 滿足 $A\times A^{-1}=A^{-1}\times A=I_{n\times n}$ 時 , 則 $A^{-1}$ 稱爲 $A$ 的反矩陣。

**(e)** 習慣上所稱的反矩陣是指方陣的乘法反矩陣。

**3.** 基本矩陣 (elementary matrix)

單位矩陣 $I_{n\times n}$ 經由一次的基本列 (行) 運算, 所得到的新矩陣, 稱爲基本矩陣。

**(1)** 定義：