

公職技師工程數學

95-101 年歷屆試題詳解

電機高普特考技師專用書

喻超凡博士、喻超弘老師 編著

喻超凡數位企業有限公司

[http:// www.superyu.idv.tw](http://www.superyu.idv.tw)

目錄

I	95 年詳解	1
1.	95年公務人員電力、電子、醫學工程三級高考	3
2.	95年地方政府電力、電子工程三等考試	19
3.	95年電機技師高等考試	32
4.	95年電子技師高等考試	39
5.	95年調查局調查人員電子科學組特考	46
6.	95年警察刑事鑑識人員特考	51
II	96 年詳解	57
1.	96年公務人員電力、電子工程三級高考	59
2.	96年地方政府電力、電子、電信工程三等考試	71
3.	96年電機技師高等考試	84
4.	96年電子技師高等考試	88
5.	96年調查局調查人員電子科學組特考	96
III	97 年詳解	103
1.	97年公務人員電力、電子、醫學工程三級高考	105
2.	97年公務人員身心障礙人員電子特考	120
3.	97年鐵路人員電力工程三級特考	133
4.	97年地方政府電力、電子工程三等考試	145
5.	97年電機技師高等考試	159
6.	97年電子技師高等考試	166
7.	97年調查局調查人員電子科學組特考	170
IV	98 年詳解	175
1.	98年公務人員電力、電子、電信、醫學工程三級高考	177
2.	98年公務人員身心障礙人員電力、電子特考	190
3.	98年鐵路人員電力工程三級特考	204
4.	98年國家安全局情報人員電子組特考	217
5.	98年地方政府電力、電子工程三等考試	230
6.	98年電機技師高等考試	244

7.	98年電子技師高等考試	249
8.	98年調查局調查人員電子科學組特考	255
V 99年詳解		265
1.	99年公務人員電力、電子、醫學工程三級高考	267
2.	99年公務人員身心障礙人員電力、電子特考	280
3.	99年鐵路人員電力、電子工程三級特考	292
4.	99年國家安全局情報人員電子組特考	305
5.	99年地方政府電力工程三等考試	319
6.	99年電機技師高等考試	333
7.	99年電子技師高等考試	337
8.	99年調查局調查人員電子科學組特考	342
VI 100年詳解		347
1.	100年公務人員電力、電子、醫學工程三級高考	349
2.	100年公務人員身心障礙人員電力、電子特考	363
3.	100年鐵路人員電力、電子工程三級特考	377
4.	100年國家安全局情報人員電子組特考	391
5.	100年地方政府電力、電子、電信三等考試	403
6.	100年電機技師高等考試	416
7.	100年電子技師高等考試	420
8.	100年調查局調查人員電子科學組特考	425
VII 101年詳解		429
1.	101年公務人員電力、電子、電信工程三級高考	431
2.	101年鐵路人員電力、電子工程三級特考	446
3.	101年國家安全局情報人員電子組特考	459
4.	101年地方政府電力、電子、電信三等考試	472
5.	101年電機技師高等考試	488
6.	101年電子技師高等考試	492
7.	101年調查局調查人員電子科學組特考	496

Part I

95 年詳解

1. 95年公務人員電力、電子、醫學工程高考

甲、申論題部分 (50分)

1. 若 C 表示一個 $|z - 1| = 2$ 的圓，試求圍線積分 $\oint_C \frac{e^z}{z(z-4)} dz$ 。(5分)
 《喻超凡，喻超弘 95 電力、電子、醫工高考》

《解》☞ 令 $f(z) = \frac{e^z}{z(z-4)}$ ，故 $f(z)$ 在 C 內具有 $z = 0$ 的一階 pole，且

$$\text{Res}f(0) = \left. \frac{e^z}{z-4} \right|_{z=0} = -\frac{1}{4}$$

故

$$\oint_C \frac{e^z}{z(z-4)} dz = 2\pi i \text{Res}f(0) = 2\pi i \left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{\pi i}{2}$$

2. (1) 求 $F(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } |x| < a \\ 0 & \text{if } |x| > a \end{cases}$ 之傅立葉轉換 ($f(w) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x)e^{-iwx} dx$)。(5分)

(2) 計算 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(wa) \cos(wx)}{w} dw$ 。(5分)

(3) 求 $\int_0^{\infty} \frac{\sin w}{w} dw$ 之值。(5分)

《喻超凡，喻超弘 95 電力、電子、醫工高考》

《解》☞

(1)

$$\begin{aligned} f(w) &= \mathcal{F}\{F(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} F(x)e^{-iwx} dx \\ &= \int_{-a}^a (\cos wx - i \sin wx) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 2 \int_0^a \cos wx \, dx = 2 \frac{\sin wx}{w} \Big|_0^a \\
 &= \frac{2 \sin wa}{w}
 \end{aligned}$$

(2) 因

$$\begin{aligned}
 F(x) &= \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{2 \sin wa}{w} \right\} \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2 \sin wa}{w} e^{iwx} \, dw \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin wa}{w} (\cos wx + i \sin wx) \, dw \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin wa \cos wx}{w} \, dw
 \end{aligned}$$

即

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin wa \cos wx}{w} \, dw = \begin{cases} \pi & ; |x| < a \\ 0 & ; |x| > a \\ \frac{\pi}{2} & ; x = \pm a \end{cases}$$

(3)

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin wa}{w} \, dw = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin wa}{w} \, dw = \frac{1}{2} \pi F(0) = \frac{\pi}{2}$$

3. 令矩陣 $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$, 試求

(1) A 之特徵值 (eigenvalues) (3分)

(2) A 之特徵向量 (eigenvectors) (3分)

(3) 計算 $e^{-A} = ?$ (4分)

《喻超凡, 喻超弘 95 電力、電子、醫工高考》

《解》

(1) 由 $\det(A - \lambda I) = 0$, 可得 A 的特徵值為 $\lambda = 4, -3$ 。

(2) 將 $\lambda = 4$ 代回 $(A - \lambda I)X = 0$ 中可得

$$\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

可得對應的特徵向量為

$$X = c_1 \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} \quad (c_1 \neq 0)$$

將 $\lambda = -3$ 代回 $(A - \lambda I)X = 0$ 中可得

$$\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

可得對應的特徵向量為

$$X = c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (c_2 \neq 0)$$

(3) 令

$$e^{-A} = aA + bI$$

將 $\lambda = 4, -3$ 代入上式, 可得

$$\begin{cases} e^{-4} = 4a + b \\ e^3 = -3a + b \end{cases}$$

故

$$a = \frac{1}{7}(e^{-4} - e^3), \quad b = \frac{1}{7}(3e^{-4} + 4e^3)$$

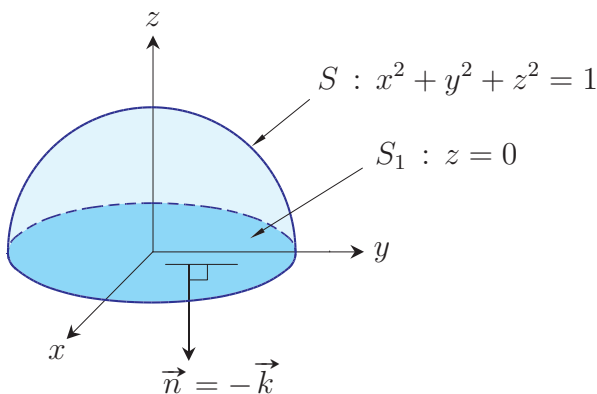
則

$$e^{-A} = \frac{1}{7}(e^{-4} - e^3)A + \frac{1}{7}(3e^{-4} + 4e^3)I$$

4. 有一表面 S 如下 $S : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0$, 假設有一向量函數為

$\vec{F}(x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, 請計算 $\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{A}$ 之值。(10分)

《喻超凡, 喻超弘 95 電力、電子、醫工高考》



《解》 令 $S + S_1$ 所圍的區域為上半球 D (如圖), 則

$$\iint_{S+S_1} (\vec{F} \cdot \vec{n}) dA = \iiint_D (\nabla \cdot \vec{F}) dx dy dz$$

故

$$\iint_S (\vec{F} \cdot \vec{n}) dA = \iiint_D (\nabla \cdot \vec{F}) dx dy dz - \iint_{S_1} (\vec{F} \cdot \vec{n}) dA \quad (1)$$

因

$$\iiint_D (\nabla \cdot \vec{F}) dx dy dz = \iiint_D 3 dx dy dz = 3 \times \frac{1}{2} \times \frac{4\pi}{3} \times 1^3 = 2\pi \quad (2)$$

且 $S_1: z = 0, x^2 + y^2 \leq 1$, 故 $\vec{n} = -\vec{k}$, 則

$$\begin{aligned} \iint_{S_1} (\vec{F} \cdot \vec{n}) dA &= \iint_{S_1} \{(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \cdot (-\vec{k})\} dA \\ &= - \iint_{S_1} z dA = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

將 (2)、(3) 兩式代回 (1) 中可得

$$\iint_S (\vec{F} \cdot \vec{n}) dA = 2\pi - 0 = 2\pi$$

5. 求出微分方程式 $y'' + 9y = x \cos x$ 的通解。(10分)

《喻超凡, 喻超弘 95 電力、電子、醫工高考》

《解》

(1) 齊次解：令 $y = e^{mx}$ 代回 ODE 中可得

$$m^2 + 9 = 0 \Rightarrow m = \pm 3i$$

故

$$y_h(x) = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x$$

(2) 特解：

$$\begin{aligned} y_p(x) &= \frac{1}{D^2 + 9} x \cos x \\ &= x \frac{1}{D^2 + 9} \cos x - \frac{2D}{(D^2 + 9)^2} \cos x \\ &= \frac{x}{8} \cos x + \frac{1}{32} \sin x \end{aligned}$$

(3) 通解： $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$

乙、測驗題部分 (50分)

1. $i = \sqrt{-1}$ ，下列那一級數 (series) 收斂？

(A) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (B) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}$ (C) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ (D) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$

《喻超凡，喻超弘 95 電力、電子、醫工高考》

《解》☞ (B)；因

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n} &= i - \frac{1}{2} - \frac{i}{3} + \frac{1}{4} + \frac{i}{5} + \cdots \\ &= i\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots\right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots\right) \\ &= i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n} \end{aligned}$$

因 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$ 、 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n}$ 均為收斂的交錯級數，故 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}$ 收斂。

2. 有一個平面包含 $\vec{B} = \vec{j} - \vec{k}$ 及 $\vec{C} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ 兩個向量，求出向量 $\vec{A} = \vec{i} - 2\vec{k}$ 與該平面法線的夾角應為何？

(A) $\theta = \cos^{-1} 0$ (B) $\theta = \cos^{-1} 1$ (C) $\theta = \cos^{-1} \frac{4}{\sqrt{30}}$ (D) $\theta = \cos^{-1} \frac{1}{\sqrt{30}}$

《喻超凡，喻超弘 95 電力、電子、醫工高考》

《解》☞ (C)；平面的法向量為

$$\vec{n} = \vec{B} \times \vec{C} = (\vec{j} - \vec{k}) \times (\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) = 2\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$$

故夾角為

$$\cos \theta = \frac{\vec{n} \cdot \vec{A}}{|\vec{n}| \cdot |\vec{A}|} = \frac{2\vec{i} - \vec{j} - \vec{k} \cdot \vec{i} - 2\vec{k}}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{30}}$$

3. 下列何組向量可成爲 \mathbb{R}^2 空間的單範正交基底 (orthonormal basis) ?

(A) $\{(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})^T, (1, -1)^T\}$ (B) $\{(-1/2, \sqrt{3}/2)^T, (\sqrt{3}/2, -1/2)^T\}$

(C) $\{(1, 1)^T, (1, -1)^T\}$ (D) $\{(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})^T, (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})^T\}$

《喻超凡, 喻超弘 95 電力、電子、醫工高考》

《解》☞ (D) ;

$$(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})^T \cdot (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})^T = 0$$

且

$$\|(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})^T\| = \|(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})^T\| = 1$$

4. 假設 $\vec{R}(t) = 2t\vec{i} - \cos(3t)\vec{j} + t^3\vec{k}$, $0 \leq t \leq 1$, 求 $\vec{R}' = \frac{d\vec{R}}{dt}$ 方向之單位向量爲何?

(A) $\frac{2\vec{i} + 3\sin(3t)\vec{j} + 3t^2\vec{k}}{4 + 9\sin^2(3t) + 9t^4}$ (B) $\frac{2\vec{i} + 3\sin(3t)\vec{j} + 3t^2\vec{k}}{\sqrt{4 + 9\sin^2(3t) + 9t^4}}$

(C) $\frac{3\sin(3t)\vec{j} + 3t^2\vec{k}}{\sqrt{9\sin^2(3t) + 9t^4}}$ (D) $\frac{2\vec{i} + 3\sin(3t)\vec{j} + 4t^2\vec{k}}{\sqrt{8 + 9\sin^2(3t) + 7t^4}}$

《喻超凡, 喻超弘 95 電力、電子、醫工高考》

《解》☞ (B) ;

$$\vec{R}'(t) = 2\vec{i} + 3\sin(3t)\vec{j} + 3t^2\vec{k}$$

故單位向量爲

$$\frac{\vec{R}'(t)}{|\vec{R}'(t)|} = \frac{2\vec{i} + 3\sin(3t)\vec{j} + 3t^2\vec{k}}{\sqrt{4 + 9\sin^2(3t) + 9t^4}}$$

5. 下列敘述何者正確？

- (A) 如果 A 是赫米特矩陣 (Hermitian matrix), 並且 $A^2 = I$, I 是單位矩陣, 則 A 也是么正矩陣 (unitary matrix)
- (B) 赫米特矩陣的行列式值 (determinant) 不一定是實數 (real)。
- (C) 令 $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_i(M)$ 表示矩陣 M 之所有特徵值 (eigenvalue) 的總和。現給予 A 、 B 兩矩陣, 則 $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_i(A) + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_i(B) \neq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_i(A+B)$
- (D) 如果一個矩陣有重複的 (repeated) 特徵值, 則此矩陣無法對角化 (diagonalizable)
- 《喻超凡, 喻超弘 95 電力、電子、醫工高考》

《解》☞ (A) ; A 為赫米特矩陣, 則 $A^* = A$, 故

$$A^2 = AA = A^*A = I$$

則 A 為 unitary 矩陣

6. 試求微分方程式 $x^2 dy - 2y dx = -(y^2 + 2x) dy$ 之通解, 其中 c 為任意常數。

(A) $y = 2 \cos^{-1}(x/y) + c$ (B) $y = 2 \cot^{-1}(x/y) + c$

(C) $y = 2 \sec^{-1}(x/y) + c$ (D) $y = 2 \tan^{-1}(x/y) + c$

《喻超凡, 喻超弘 95 電力、電子、醫工高考》

《解》☞ (D) ; 原式可改寫成

$$-2(y dx - x dy) + (x^2 + y^2) dy = 0 \Rightarrow -2 \frac{d(xy^{-1})}{y^{-2}} + (x^2 + y^2) dy = 0$$

即

$$-\frac{2}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} d\left(\frac{x}{y}\right) + dy = 0$$

兩端積分可得

$$-2 \tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right) + y = c$$

7. 計算 $\oint_C \frac{\cosh z}{z^3} dz$ 之值，其中 C 表示一個正方形，其邊緣通過點 $(\pm 2, 0)$ 及 $(0, \pm 2)$ ，逆時鐘方向 (counterclockwise)。

(A) π (B) 0 (C) $i2\pi$ (D) $i\pi$

《喻超凡，喻超弘 95 電力、電子、醫工高考》

《解》☞ (D)；令 $f(z) = \frac{\cosh z}{z^3}$ 則 $f(z)$ 在 C 內具有 $z = 0$ 的 3 階 poles，且

$$\text{Res}f(0) = \frac{1}{2!} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d^2}{dz^2} z^3 f(z) = \frac{1}{2}$$

故

$$\oint_C \frac{\cosh z}{z^3} dz = 2\pi i \text{Res}f(0) = 2\pi i \frac{1}{2} = \pi i$$

8. 若一系統之轉移函數為 $G(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2}$ ，且輸入信號為 $x(t) = \sin 2t$ ，則輸出信號 $y(t)$ 之拉氏轉換 $Y(s)$ 為：

(A) $\frac{s}{(s+1)(s+2)(s^2+2)}$ (B) $\frac{2}{(s+1)(s+2)(s^2+2)}$

(C) $\frac{s}{(s+1)(s+2)(s^2+4)}$ (D) $\frac{2}{(s+1)(s+2)(s^2+4)}$

《喻超凡，喻超弘 95 電力、電子、醫工高考》

《解》☞ (D)；

$$\mathcal{L}\{y(t)\} = G(s)\mathcal{L}\{x(t)\} = \frac{2}{(s+1)(s+2)(s^2+4)}$$

9. 下列何者與 $\mathcal{L}\{f(t)u(t-a)\}$ 相等，其中 $\mathcal{L}\{\cdot\}$ 代表拉氏換 (Laplace transform)?

- (A) $e^{-at} \mathcal{L}\{af(t)\}$ (B) $e^{-at} \mathcal{L}\left\{\frac{df}{dt}\right\}$ (C) $e^{-at} \mathcal{L}\{af(t-a)\}$
 (D) $e^{-at} \mathcal{L}\{f(t+a)\}$ **《喻超凡, 喻超弘 95 電力、電子、醫工高考》**

《解》☞ (D) ; $\mathcal{L}\{f(t)u(t-a)\} = e^{-at} \mathcal{L}\{f(t+a)\}$

10. 若微分方程式 $y'' - 4y' + 4y = 25 \sin x$ 且 $y(0) = 3$ 、 $y'(0) = 2$ ，試求其解？

- (A) $y = e^{2x} + 2xe^{2x} + \cos x$ (B) $y = 3e^{2x} - 5xe^{2x} + \sin x$
 (C) $y = 2e^{2x} + 2xe^{2x} + \cos x + \sin x$ (D) $y = -e^{2x} + xe^{2x} + 3 \sin x + 4 \cos x$
《喻超凡, 喻超弘 95 電力、電子、醫工高考》

《解》☞ (D) ; 齊次解：令 $y = e^{mx}$ 代回 ODE 中可得

$$m^2 - 4m + 4 = 0 \Rightarrow m = 2, 2$$

故

$$y_h(x) = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}$$

特解

$$\begin{aligned} y_p(x) &= \frac{1}{D^2 - 4D + 4} 25 \sin x \\ &= 25 \frac{4D + 3}{-(4D - 3)(4D + 3)} \sin x \\ &= 25 \frac{4D + 3}{-(16D^2 - 9)} \sin x \\ &= (4 \cos x + 3 \sin x) \end{aligned}$$

通解

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} + 4 \cos x + 3 \sin x$$

再由

$$\begin{cases} y(0) = 3 = c_1 + 4 \\ y'(0) = 2 = 2c_1 + c_2 + 3 \end{cases} \Rightarrow c_1 = -1, c_2 = 1$$

故

$$y(x) = -e^{2x} + xe^{2x} + 3 \sin x + 4 \cos x$$

11. 下列那一函數滿足 Laplace 方程式 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$?

(A) $u = \sin x \cos y$ (B) $u = \tan^{-1}(y/x)$ (C) $u = x^2 + y^2$ (D) $u = \sinh x \cosh y$

《喻超凡, 喻超弘 95 電力、電子、醫工高考》

《解》☞ (B) ; 令 $x = r \cos \theta$ 、 $y = r \sin \theta$, 故

$$\frac{y}{x} = \tan \theta \Rightarrow \theta = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

故 $u = \tan^{-1} \frac{y}{x} = \theta$, 則

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0$$

12. $f(t)$ 是週期 2π 的函數, 在 $-\pi \leq t < \pi$ 之間定義為 $f(t) = |t|$ 。將 $f(t)$ 的傅立葉級數 (Fourier series) 表示成

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt)$$

求 $\frac{a_0}{2}$ 之值為何 ?

(A) $\pi/2$ (B) π (C) 2π (D) 4π

《喻超凡, 喻超弘 95 電力、電子、醫工高考》

《解》☞ (A) ;

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} t dt = \frac{1}{\pi} \times \frac{t^2}{2} \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$$

13. 給定一個連續隨機變數 X ，它的機率密度函數為 $f(x) = \begin{cases} 1/10 & , 0 \leq x < 10 \\ 0 & , \text{otherwise} \end{cases}$ ，
則條件期望值 $E[X | X \leq 6]$ 為何？
(A) 3.0 (B) 5.0 (C) 6.0 (D) 10.8

《喻超凡，喻超弘 95 電力、電子、醫工高考》

《解》☞ (A)；

$$f(x | x \leq 6) = \frac{f(x, x \leq 6)}{P\{X \leq 6\}} = \frac{\frac{1}{10}}{\int_0^6 \frac{1}{10} dx} = \frac{1}{6} \quad (0 \leq x \leq 6)$$

故

$$E[X | X \leq 6] = \int_0^6 x f(x | x \leq 6) dx = \int_0^6 x \frac{1}{6} dx = \frac{1}{6} \times \frac{36}{2} = 3$$

14. 二維隨機變數 X 與 Y 的聯合機率密度函數 (joint probability density function) 為

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} xy & , 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2 \\ 0 & , \text{otherwise} \end{cases}$$

則 $X^2 + Y^2 < 1$ 的機率為何？

- (A) 1/16 (B) 1/8 (C) 3/16 (D) 1/4

《喻超凡，喻超弘 95 電力、電子、醫工高考》

《解》☞ (B)；

$$\begin{aligned} P\{X^2 + Y^2 < 1\} &= \iint_{x^2 + y^2 < 1} f_{X,Y}(x, y) dx dy \\ &= \int_{\theta=0}^{r=\frac{\pi}{2}} \int_{r=0}^{r=1} (r \cos \theta)(r \sin \theta)r dr d\theta \\ &= \frac{1}{8} \end{aligned}$$

15. $\mathcal{L}\{\cdot\}$ 代表拉氏轉換 (Laplace transform), 令 $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+1)}\right\}$, 則 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ 等於多少?
- (A) 0 (B) $1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ (C) 1 (D) 2

《喻超凡, 喻超弘 95 電力、電子、醫工高考》

《解》☞ (C);

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+1)}\right\} = \int_0^t \sin t \, dt = (1 - \cos t)$$

$$\text{故 } f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

16. 令 P_n 為所有次數小於 n 之多項式集合, $C^n[a, b]$ 為所有可 n 次微分之函數 $f(x)$, $x \in [a, b]$ 所成的集合。 \mathbb{R}^n 表示 n 維實數向量, $\mathbb{R}^{n \times n}$ 表示 n 階實數矩陣。則下列敘述何者正確?

- (A) $(1, 1, 0)^T$, $(1, 0, -1)^T$, $(1, -1, 2)^T$ 在 \mathbb{R}^3 線性相依 (linearly dependent)
- (B) x^2 , $x|x|$, 此二向量在 $C^1[-1, 1]$ 線性相依。
- (C) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ 在 $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ 線性獨立 (linearly independent)。
- (D) $x+1$, $x+2$, x^2-1 在 P_3 線性獨立。

《喻超凡, 喻超弘 95 電力、電子、醫工高考》

《解》☞ (D);

$$W(x+1, x+2, x^2-1) = \begin{vmatrix} x+1 & x+2 & x^2-1 \\ 1 & 1 & 2x \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

故 $x+1$, $x+2$, x^2-1 在 P_3 為線性獨立。