

公職技師工程數學

102 歷試詳解

勘誤檔案

喻超凡 喻超弘編著



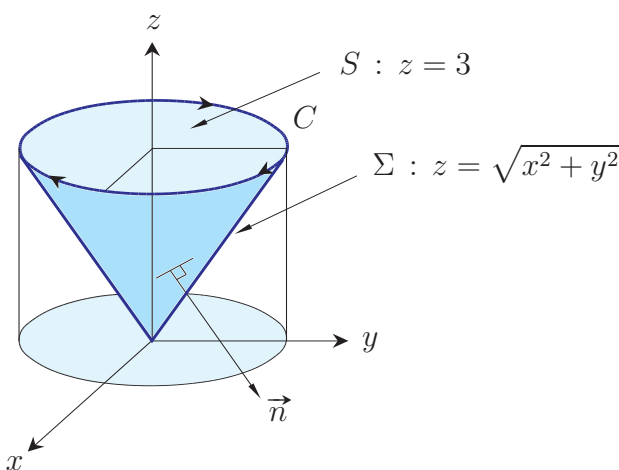
喻超凡數位企業有限公司

版權所有 翻印必究

$$y_2(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y_2(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+k} - \frac{\sqrt{3k}}{s^2+3k}\right\} = \cos \sqrt{k}t - \sin \sqrt{3k}t$$

2. 令 Σ 是圓錐 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x^2 + y^2 \leq 9$ 的表面, 若 \vec{n} 為 Σ 之單位法向量且 $\vec{F} = -y\vec{i} + x\vec{j} - xyz\vec{k}$ 。求 $\int_{\Sigma} (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n} d\sigma$ 。(15%)

《喻超凡, 喻超弘 102鐵路電力、電子特考》



《解》☞ 曲面 Σ 及 S 的方程式為

$$\begin{cases} \Sigma : z = \sqrt{x^2 + y^2}, z > 0 \\ S : z = 3, x^2 + y^2 \leq 9 \end{cases}$$

則曲線 C 為 Σ 之邊界曲線, 同時亦為 S 之邊界曲線 (如圖)。令 Σ 的單位法向量 \vec{n} 為朝外的方向, 故 S 的單位法向量 $\vec{n} = -\vec{k}$ (如圖), 且

$$(\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y & x & -xyz \end{vmatrix} \cdot (-\vec{k}) = -2$$

故由 Stokes's 定理可得

$$\iint_{\Sigma} (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n} d\sigma = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

《解》☞ (B) ; 令

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

故

$$Proj_s w^T = A(A^T A)^{-1} A^T w^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 1.8 \\ 0.6 \end{bmatrix}$$

10. 令 $\mathbf{x} = [1 \ 3 \ 2]^T$, $\mathbf{y}_1 = [1 \ 1 \ 1]^T$, $\mathbf{y}_2 = [1 \ -1 \ 0]^T$, $\mathbf{y}_3 = [1 \ 0 \ 0]^T$ 且定義 L 為 \mathbb{R}^3 至 \mathbb{R}^3 相對於基底 (basis) $[\mathbf{y}_1 \ \mathbf{y}_2 \ \mathbf{y}_3]$ 之線性轉換 (linear transformation)

$$L\left(\sum_{i=1}^3 c_i \mathbf{y}_i\right) = (2c_1 + c_3)\mathbf{y}_1 - (2c_2 + c_3)\mathbf{y}_2 + (c_1 + c_2 + c_3)\mathbf{y}_3$$

則 $L(\mathbf{x}) = ?$

(A) $\begin{bmatrix} 7 \\ 6 \\ -8 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix}$

《喻超凡, 喻超弘 102鐵路電力、電子特考》

《解》☞ (C) ; 因

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

可解得 $c_1 = 2$ 、 $c_2 = -1$ 、 $c_3 = 0$, 故

$$L(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 2c_1 + c_3 \\ -(2c_2 + c_3) \\ c_1 + c_2 + c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

《解》☞ (D) ; $\nabla \times (\nabla\psi) = 0$

14. 若將三維空間中之曲線 C 以參數表示法表示為 $x = 2 \cos t$, $y = 2 \sin t$, $z = t$; 且 $0 \leq t \leq \pi$, 則曲線 C 之長度為 :

- (A) $\frac{\sqrt{5}}{2}\pi^2$ (B) $\frac{3}{2}\pi^2$ (C) $\sqrt{5}\pi$ (D) 3π

《喻超凡, 喻超弘 102鐵路電力、電子特考》

《解》☞ (C) ;

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt = \sqrt{(-2 \sin t)^2 + (2 \cos t)^2 + 1} dt = \sqrt{5} dt$$

故

$$S = \int_C ds = \int_{t=0}^{t=\pi} \sqrt{5} dt = \sqrt{5} \pi$$

15. 求解微分方程式 $xy' = \frac{y^2}{2} + y$, 則其解為何 ?

- (A) $y = \frac{x}{c-x}$ (B) $y = \frac{x}{2(c-x)}$ (C) $y = \frac{2x}{c-x}$ (D) $y = \frac{2}{c-x}$

《喻超凡, 喻超弘 102鐵路電力、電子特考》

《解》☞ (C) ; 原式可改寫成

$$\frac{dy}{\frac{y^2}{2} + y} = \frac{dx}{x}$$

兩端積分可得

$$\ln |y| - \ln |y + 2| = \ln |x| + k$$

《解》☞ (B) ; 令 $y = e^{mx}$ 代回 ODE 中可得

$$5m^2 - 3.5m + 0.6 = 0 \Rightarrow m = 0.3, 0.4$$

故

$$y(x) = c_1 e^{0.4x} + c_2 e^{0.3x}$$

15. 求解微分方程 $y^{(4)} - 29y'' + 100y = 0$, 其解為:

- (A) $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 e^{2x} + c_4 e^{-2x}$
 (B) $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} + c_3 e^{5x} + c_4 e^{-5x}$
 (C) $y = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 e^{2x} + c_4 x e^{2x}$
 (D) $y = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} + c_3 e^{5x} + c_4 x e^{5x}$

《喻超凡, 喻超弘 102 電力、電子、電信、醫工高考》

《解》☞ (B) ; 令 $y = e^{mx}$ 代回 ODE 中可得

$$m^4 - 29m^2 + 100 = 0 \Rightarrow m = \pm 2, \pm 5$$

故

$$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} + c_3 e^{5x} + c_4 e^{-5x}$$

16. 微分方程式 $x^3(1-x)y'' + 2xy' + y = \sin(x)$ 有幾個奇異點 (singular points)?

- (A) 2個 (B) 3個 (C) 4個 (D) 無窮多個

《喻超凡, 喻超弘 102 電力、電子、電信、醫工高考》

《解》☞ (A) ; 原式可改寫成

$$y'' + \frac{2}{x^2(1-x)}y' + \frac{1}{x^3(1-x)}y = \frac{\sin x}{x^3(1-x)}$$

乙、測驗題部分 (50分)

1. 下列何者為拋物柱面 $z = x^2$ 的位置向量參數表示式, 其中 u, v 為變數?

(A) $u\vec{i} + u\vec{j} + u^2\vec{k}$ (B) $u\vec{i} + v\vec{j} + u^2\vec{k}$ (C) $v\vec{i} + v\vec{j} + u^2\vec{k}$

(D) $v\vec{i} + v\vec{j} + v^2\vec{k}$ 《喻超凡, 喻超弘 102 地方特考電力、電子工程》

《解》☞ (B); 令 $x = u, y = v$, 則 $z = x^2 = u^2$, 故位置向量為

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = u\vec{i} + v\vec{j} + u^2\vec{k}$$

2. 下列何者為 $\oint_C 2x \cos(2y) dx - 2x^2 \sin(2y) dy$ 之值, 其中 C 為一圓: $x^2 + y^2 = 4$ (定義逆時針方向為正)?

(A) $-3\sqrt{2}$ (B) 0 (C) $3\sqrt{2}$ (D) $2\sqrt{7}$

《喻超凡, 喻超弘 102 地方特考電力、電子工程》

《解》☞ (B); 因 $C: x^2 + y^2 = 4$, 由 Green's 定理可知

$$\begin{aligned} & \oint_C 2x \cos(2y) dx - 2x^2 \sin(2y) dy \\ &= \iint_D \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (-2x^2 \sin 2y) - \frac{\partial}{\partial y} (x \cos 2y) \right\} dx dy \\ &= \iint_D \{-4x \sin 2y + 2x \sin 2y\} dx dy \\ &= \iint_D (-2x \sin 2y) dx dy \\ &= \int_{y=-2}^{y=2} \int_{x=-\sqrt{4-y^2}}^{x=\sqrt{4-y^2}} (-2x \sin 2y) dx dy = 0 \end{aligned}$$

3. 試求向量場 $\vec{v} = \sinh(x-z)\vec{i} + 2y\vec{j} + (z-y^2)\vec{k}$ 的 $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{v})$ 值？

- (A) -2 (B) 0 (C) $\sinh(x-z)$ (D) $2y$

《喻超凡，喻超弘 102 地方特考電力、電子工程》

《解》 (B) ; $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{v}) = 0$

4. 有一矩陣 $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ ，則以下何者為行列式 $\det(B^5)$ 的值？

- (A) 1 (B) 5 (C) 32 (D) -32

《喻超凡，喻超弘 102 地方特考電力、電子工程》

《解》 (D) ;

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -2$$

$$\text{則 } \det(B^5) = \det(B)^5 = (-2)^5 = -32$$

5. 下列矩陣何者非屬基本矩陣 (elementary matrices) ？

- (A) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

《喻超凡，喻超弘 102 地方特考電力、電子工程》

《解》 (B)

6. 在螺旋圓弧線 $\vec{r}(t) = [3 \cos t, 3 \sin t, 4t]$ 之上，從點 $P : (3, 0, 0)$ 到點 $Q : (-3, 0, 20\pi)$ 的弧長 (arc length) 爲何？

(A) 20π (B) 25π (C) 30π (D) 40π

《喻超凡，喻超弘 102 地方特考電力、電子工程》

《解》 (B) ; 因

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = [-3 \sin t, 3 \cos t, 4]$$

故 $ds = \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| dt = 5 dt$ ，且在 $P : (3, 0, 0)$ 時 $t = 0$ ，在 $Q : (-3, 0, 20\pi)$ 時 $t = 5\pi$ ，則

$$S = \int_{t=0}^{t=5\pi} ds = \int_{t=0}^{t=5\pi} 5 dt = 25\pi$$

7. 以下那一組是由基底 $B = \{[3 \ 4], [1 \ 0]\}$ 經由 Gram-Schmidt 正交程序轉換而成的正交基底？

(A) $\{[3 \ 4], [\frac{1}{3} \ -\frac{1}{4}]\}$ (B) $\{[3 \ 4], [\frac{15}{24} \ -\frac{15}{32}]\}$

(C) $\{[3 \ 4], [\frac{16}{25} \ -\frac{12}{25}]\}$ (D) $\{[3 \ 4], [-\frac{8}{22} \ \frac{6}{22}]\}$

《喻超凡，喻超弘 102 地方特考電力、電子工程》

《解》 (C) ; 令對應的正交基底爲 $\{u_1, u_2\}$ ，則 $u_1 = [3 \ 4]$ ，且

$$u_2 = [1 \ 0] - \frac{3}{25}[3 \ 4] = [\frac{16}{25} \ -\frac{12}{25}]$$

對應的特徵向量為

$$X = c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (c_3 \neq 0)$$

9. 令 $\sum_{n=1}^{\infty} Z_n$ 為一複數級數 (complex series)，則下列敘述何者錯誤？

(A) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} Z_n = 0$ ，則 $\sum_{n=1}^{\infty} Z_n$ 收斂。

(B) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} Z_n \neq 0$ ，則 $\sum_{n=1}^{\infty} Z_n$ 發散。

(C) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} Z_n$ 收斂，則 $\lim_{n \rightarrow \infty} Z_n = 0$ ，。

(D) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} |Z_n|$ 收斂，則 $\sum_{n=1}^{\infty} Z_n$ 收斂。

《喻超凡, 喻超弘 102 地方特考電力、電子工程》

《解》 (A)

10. 有關複數的性質，何者錯誤？

(A) 一個複數的實部 (real part) 是實數。

(B) 一個複數的虛部 (real part) 是實數。

(C) $|z| + |w| \geq |z + w|$ ，其中 z, w 為複數。

(D) $z\bar{z} = z^2$ ，其中 z 為複數。

《喻超凡, 喻超弘 102 地方特考電力、電子工程》

《解》☞ (A) ; 公式

17. 定義函數 $f(t)$ 之拉氏轉換 (Laplace transform) $\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$,

令 $\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{e^{-2s}}{(s+3)^2}$, 則 $f(t)$ 為何? 其中 $u(t)$ 為單位步階 (unit step) 函數:

(A) $te^{-3(t-2)}u(t-2)$ (B) $(t-2)e^{-3t}u(t-2)$ (C) $(t-2)e^{-3(t-2)}u(t-2)$

(D) $te^{-3t}u(t-2)$ 《喻超凡, 喻超弘 102 地方特考電力、電子工程》

《解》☞ (C) ;

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-2s}}{(s+3)^2}\right\} = (t-2)e^{-3(t-2)}u(t-2)$$

18. 假設隨機變數 X 的機率密度函數為 $f(x) = \begin{cases} k\sqrt{x} & ; 0 < x < 1 \\ 0 & ; \text{其他} \end{cases}$, 試求出 k 的值為何?

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) $\frac{3}{2}$ (D) 1

《喻超凡, 喻超弘 102 地方特考電力、電子工程》

《解》☞ (C) ; 因

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_0^1 k\sqrt{x} dx = k \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = \frac{2}{3}k = 1$$

故 $k = \frac{3}{2}$

19. 自一副 52 張撲克牌中取 3 張牌，試求取出之牌中出現多於 1 張 K 之機率為何？

- (A) $\frac{53}{5525}$ (B) $\frac{73}{5525}$ (C) $\frac{93}{5525}$ (D) $\frac{113}{5525}$

《喻超凡，喻超弘 102 地方特考電力、電子工程》

《解》☞ (B)；取 2 張 K 的機率為 $\frac{48 \times 4 \times 3 \times 3}{52 \times 51 \times 50}$ ，取 3 張 K 的機率為 $\frac{4 \times 3 \times 2}{52 \times 51 \times 50}$

故取出之牌中出現多於 1 張 K 之機率為

$$\frac{48 \times 4 \times 3 \times 3}{52 \times 51 \times 50} + \frac{4 \times 3 \times 2}{52 \times 51 \times 50} = \frac{73}{5525}$$

20. 給定一個隨機變數 X ，其機率密度函數為 $f(x) = \begin{cases} \frac{1+x}{2} & , -1 < x < 1 \\ 0 & , \text{elsewhere} \end{cases}$

試問一個隨機變數 $Y = X^2$ ，其機率密度函數 $g(y)$ 為何？

(A) $g(y) = \frac{1+\sqrt{y}}{2}$ ， $0 < y < 1$ (B) $g(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}$ ， $0 < y < 1$

(C) $g(y) = \frac{1-\sqrt{y}}{2}$ ， $0 < y < 1$ (D) $g(y) = 1$ ， $0 < y < 1$

《喻超凡，喻超弘 102 地方特考電力、電子工程》

《解》☞ (B)；因 $Y = X^2$ ，故 $X = \pm\sqrt{Y}$ ，且 $\frac{dx}{dy} = \pm\frac{1}{2\sqrt{y}}$ ，則

$$\begin{aligned} g(y) &= f(x = \sqrt{y}) \left| \frac{dx}{dy} \right| + f(x = -\sqrt{y}) \left| \frac{dx}{dy} \right| \\ &= \frac{1+\sqrt{y}}{2} \frac{1}{2\sqrt{y}} + \frac{1-\sqrt{y}}{2} \frac{1}{2\sqrt{y}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{y}} \quad (0 < y < 1) \end{aligned}$$