翻轉工程數學下冊

勘誤檔案

喻超凡　喻超弘編著

喻超凡數位企業有限公司

由

$$u(0\,,\,t)=X(0)T(t)=0$$

可得 $X(0)=0$, 同理由

$$u_{xx}(0\,,\,t)=u(1\,,\,t)=u_{xx}(1\,,\,t)=0$$

可得 $X''(0)=X(1)=X''(1)=0$

(1) 求特徵值及特徵向量

$$X''''(x)+\lambda X(x)=0$$

$$X(0)=X(1)=X''(0)=X''(1)=0$$

(i) $\lambda>0$, 令 $\lambda=p^4$ $(0<p<\infty)$, 則

$$X''''(x)+p^4X(x)=0$$

故

$$\begin{aligned} X(x) &= e^{\frac{\sqrt{2}}{2}px}(c_1\cos\frac{\sqrt{2}}{2}px+c_2\sin\frac{\sqrt{2}}{2}px) \\ &\quad +e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}px}(c_3\cos\frac{\sqrt{2}}{2}px+c_4\sin\frac{\sqrt{2}}{2}px) \end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned} X''(x) &= p^2e^{\frac{\sqrt{2}}{2}px}(-c_1\sin\frac{\sqrt{2}}{2}px+c_2\cos\frac{\sqrt{2}}{2}px) \\ &\quad -p^2e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}px}(-c_3\sin\frac{\sqrt{2}}{2}px+c_4\cos\frac{\sqrt{2}}{2}px) \end{aligned}$$

代入 B.C. 可得

$$X(0)=0=c_1+c_3 \qquad (2)$$

$$X''(0)=0=c_2-c_4 \qquad (3)$$

$$\begin{aligned} X(1) &= e^{\frac{\sqrt{2}}{2}p}(c_1\cos\frac{\sqrt{2}}{2}p+c_2\sin\frac{\sqrt{2}}{2}p) \\ &\quad +e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}p}(c_3\cos\frac{\sqrt{2}}{2}p+c_4\sin\frac{\sqrt{2}}{2}p)=0 \end{aligned} \qquad (4)$$

$$\begin{aligned} X''(1) &= p^2e^{\frac{\sqrt{2}}{2}p}(-c_1\sin\frac{\sqrt{2}}{2}p+c_2\cos\frac{\sqrt{2}}{2}p) \\ &\quad -p^2e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}p}(-c_3\sin\frac{\sqrt{2}}{2}p+c_4\cos\frac{\sqrt{2}}{2}p)=0 \end{aligned} \qquad (5)$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}(A_{mn}\cos\frac{2\alpha_m t}{\rho}+B_{mn}\sin\frac{2\alpha_m t}{\rho})J_n(\frac{\alpha_m}{\rho}r)\cos n\theta$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}(C_{mn}\cos\frac{2\alpha_m t}{\rho}+D_{mn}\sin\frac{2\alpha_m t}{\rho})J_n(\frac{\alpha_m}{\rho}r)\sin n\theta$$

再由

$$\frac{\partial z}{\partial t}(r\,,\,\theta\,,\,0)=0\ \Rightarrow\ B_{m0}=B_{mn}=D_{mn}=0$$

$$z(r\,,\,\theta\,,\,0)=f(r\,,\,\theta)$$
$$=\sum_{m=1}^{\infty}A_{m0}J_0(\frac{\alpha_m}{\rho}r)+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left[A_{mn}J_n(\frac{\alpha_m}{\rho}r)\cos n\theta+C_{mn}J_n(\frac{\alpha_m}{\rho}r)\sin n\theta\right]$$

故

$$\sum_{m=1}^{\infty}A_{m0}J_0(\frac{\alpha_m}{\rho}r)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(r\,,\,\theta)d\theta$$

則

$$A_{m0}=\frac{\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{\rho}\int_{-\pi}^{\pi}rf(r\,,\,\theta)J_0(\frac{\alpha_m}{\rho}r)d\theta dr}{\displaystyle\int_0^{\rho}rJ_0^2(\frac{\alpha_m}{\rho}r)dr}$$

且

$$\sum_{m=1}^{\infty}A_{mn}J_n(\frac{\alpha_m}{\rho}r)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(r\,,\,\theta)\cos n\theta d\theta$$

$$A_{mn}=\frac{\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\rho}\int_{-\pi}^{\pi}rf(r\,,\,\theta)J_n(\frac{\alpha_m}{\rho}r)\cos n\theta d\theta dr}{\displaystyle\int_0^{\rho}rJ_n^2(\frac{\alpha_m}{\rho}r)dr}$$

及

$$\sum_{m=1}^{\infty}C_{mn}J_n(\frac{\alpha_m}{\rho}r)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(r\,,\,\theta)\sin n\theta d\theta$$

$$C_{mn}=\frac{\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\rho}\int_{-\pi}^{\pi}rf(r\,,\,\theta)J_n(\frac{\alpha_m}{\rho}r)\sin n\theta d\theta dr}{\displaystyle\int_0^{\rho}rJ_n^2(\frac{\alpha_m}{\rho}r)dr}$$

代回 $z(r,\theta,t)$ 中即爲解

《解》 ☞ 由題意知 $u(r\,,\,\theta)$ 爲穩態的溫度分佈，且

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}=0 \tag{1}$$

$$u(r\,,\,\frac{\pi}{4})=100\,,\ u(r\,,\,0)=0$$

$$u(0\,,\,\theta)=\text{bounded}\,,\ u(\infty\,,\,\theta)=\text{bounded}$$

令 $u(r\,,\,\theta)=\phi(r\,,\,\theta)+\psi(\theta)$，代回 (1) 式可得

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}[\frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2}+\psi''(\theta)]=0$$

令 $\psi''(\theta)=0$，故

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2}=0$$

且

$$u(r\,,\,\frac{\pi}{4})=100=\phi(r\,,\,\frac{\pi}{4})+\psi(\frac{\pi}{4})$$

令 $\psi(\frac{\pi}{4})=100$，故 $\phi(r\,,\,\frac{\pi}{4})=0$，由

$$u(r\,,\,0)=0=\phi(r\,,\,0)+\psi(0)$$

令 $\psi(0)=0$，故 $\phi(r\,,\,0)=0$，由

$$u(0\,,\,\theta)=\text{bounded}\,,\ u(\infty\,,\,\theta)=\text{bounded}$$

可得 $\phi(0\,,\,\theta)=\text{bounded}$、$\phi(\infty\,,\,\theta)=\text{bounded}$。

(1) 先解穩態解：

$$\psi''(\theta)=0\,,\ \psi(0)=0\,,\ \psi(\frac{\pi}{4})=100$$

故

$$\psi(\theta)=c_1+c_2\theta$$

由 $\psi(0)=0=c_1$，由 $\psi(\frac{\pi}{4})=100=c_2\frac{\pi}{4}$，故 $c_2=\frac{400}{\pi}$，因此

$$\psi(\theta)=\frac{400}{\pi}\theta$$

(2) 再解暫態解：

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2}=0 \tag{2}$$

$$\phi(r\,,\,0)=\phi(r\,,\,\frac{\pi}{4})=0$$

$$\phi(0\,,\,\theta)=\text{bounded}\,,\ \phi(\infty\,,\,\theta)=\text{bounded}$$

《解》☞ 對 PDE 中的 t 變數取 Laplace 變換，可得

$$s^2Y(x,s) - sy(x,0) - y_t(x,0) = a^2\frac{d^2}{dx^2}Y(x,s) - \frac{g}{s}$$

其中 $Y(x,s) = \mathscr{L}\{y(x,t)\}$，整理可得

$$\frac{d^2}{dx^2}Y(x,s) - \frac{s^2}{a^2}Y(x,s) = \frac{g}{sa^2}$$

故

$$Y(x,s) = c_1e^{\frac{s}{a}x} + c_2e^{-\frac{s}{a}x} - \frac{g}{s^3}$$

再由

$$\mathscr{L}\{y(0,t)\} = Y(0,s) = 0 = c_1 + c_2 - \frac{g}{s^3}$$

$$\mathscr{L}\{y_x(\infty,t)\} = \frac{d}{dx}Y(\infty,s) = 0$$

可得 $c_1 = 0$，$c_2 = \frac{g}{s^3}$，故

$$Y(x,s) = \frac{g}{s^3}e^{-\frac{s}{a}x} - \frac{g}{s^3}$$

則

$$y(x,t) = \mathscr{L}^{-1}\{Y(x,s)\} = \frac{g}{2}(t-\frac{x}{a})^2H(t-\frac{x}{a}) - \frac{gt^2}{2}$$

7. Use the method of Laplace Transform to solve the partial differential equation for $u(x,t)$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = k^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad 0 < x < 1\ ,\ t > 0$$

with $u(0,t) = 0$, $u(1,t) = 0$, $u(x,0) = -F(x)$, and $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0$. 《中興化工》

《解》☞ 對 PDE 中的 t 變數取 Laplace 變換，可得

$$s^2U(x,s) - su(x,0) - u_t(x,0) = k^2\frac{d^2U(x,s)}{dx^2}$$

其中 $\mathscr{L}\{u(x,t)\} = U(x,s)$，整理可得

$$\frac{d^2U}{dx^2} - \frac{s^2}{k^2}U = \frac{s}{k^2}F(x) \tag{1}$$

11.3.2 聯立方程式的解

設方程式為 $A_{m\times n}X_{n\times 1}=B_{m\times 1}$，其中 m 為方程式的數目，n 為變數的個數，且 A 稱為係數矩陣 (Coefficient Matrix)，X 稱為變數矩陣，B 稱為常數矩陣，$[A|B]$ 稱為增廣矩陣 (Augmented matrix)。

1. 當 $m=n$ 時，即 A 為 $n\times n$ 的方陣

(1) 若 $\textbf{rank}\,(A)=n$ 時, 則 X 具有唯一解 (Unique Solution) 為 $X=A^{-1}B$。

(2) 若 $\textbf{rank}\,(A)=\textbf{rank}\,[A|B]=k<n$ 時, 則此方程式具有無窮多組解。

(3) 若 $\textbf{rank}\,(A)\neq\textbf{rank}\,[A|B]$ 時, 則此方程式無解。

2. 當 $m>n$ 時，即方程式數目大於變數數目

(1) 若 $\textbf{rank}\,(A)=\textbf{rank}\,[A|B]=n$ 時, 則方程式具有唯一解為

$$X=(A^*A)^{-1}A^*B$$

(2) 若 $\textbf{rank}\,(A)=\textbf{rank}\,[A|B]=k<n$ 時, 則此方程式具有無窮多組解。

(3) 若 $\textbf{rank}\,(A)\neq\textbf{rank}\,[A|B]$ 時, 則此方程式無解。若

$$\textbf{rank}\,(A)=n\neq\textbf{rank}\,[A|B]$$

則方程式具有最小二乘方解或最佳近似解為

$$X=(A^*A)^{-1}A^*B$$

3. 當 $m<n$ 時，即方程式數目小於變數數目

(1) 若 $\textbf{rank}\,(A)=\textbf{rank}\,[A|B]$，則此方程式具有無窮多組解。

(2) 若 $\textbf{rank}\,(A)\neq\textbf{rank}\,[A|B]$，則此方程式無解。

4. 若上述1. 2. 3. 三項中的聯立方程式，具有無窮多組解時

(1) $\textbf{rank}\,(A)=k$ 表示聯立方程式線性獨立的方程式個數。

(2) 設變數的個數為 n (即 A 的行數) 時，則聯立方程式具有 $n-\textbf{rank}\,(A)=n-k$ 個線性獨立非全為零的齊次解, 即具有 $n-k$ 個參數解。

因 **rank** $(A-\lambda I)=1$, 故 $\lambda=0$ 對應的特徵向量為

$$V=\begin{bmatrix}v_1\\v_2\\v_3\\v_4\\v_5\end{bmatrix}=c_1\begin{bmatrix}-2\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}-3\\0\\1\\0\\0\end{bmatrix}+c_3\begin{bmatrix}-4\\0\\0\\1\\0\end{bmatrix}+c_4\begin{bmatrix}-5\\0\\0\\0\\1\end{bmatrix}$$

其中 c_1 、c_2 、c_3 、c_4 不全為 0 。

(b) 由

$$AX=(XX^T)X=X(X^TX)=X\lambda_5=\lambda_5X$$

可得 $\lambda_5=55$ 其所對應的特徵向量為

$$V=c_5\,X=c_5\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\\5\end{bmatrix}\quad(c_5\neq 0)$$

22. 若 A 為 3×3 的方陣 , 且其特徵值為 α_i ($i=1,2,3$) , 令

$$B_{6\times 6}=\begin{bmatrix}4A&3A\\5A&6A\end{bmatrix}$$

求 B 的特徵值 。

《解》 ☞ 令 A 的特徵值 α_i 對應的特徵向量為 $\boldsymbol{u}_i$, 則 $A\boldsymbol{u}_i=\alpha_i\boldsymbol{u}_i$, 再令 B 的特徵值為 λ 且對應的特徵向量為

$$\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}a\boldsymbol{u}_i\\b\boldsymbol{u}_i\end{bmatrix}$$

故 $B\boldsymbol{v}=\lambda\boldsymbol{v}$, 即

$$\begin{bmatrix}4A&3A\\5A&6A\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\boldsymbol{u}_i\\b\boldsymbol{u}_i\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix}a\boldsymbol{u}_i\\b\boldsymbol{u}_i\end{bmatrix}$$

則

$$\begin{bmatrix}4aA\boldsymbol{u}_i+3bA\boldsymbol{u}_i\\5aA\boldsymbol{u}_i+6bA\boldsymbol{u}_i\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4a\alpha_i\boldsymbol{u}_i+3b\alpha_i\boldsymbol{u}_i\\5a\alpha_i\boldsymbol{u}_i+6b\alpha_i\boldsymbol{u}_i\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix}a\boldsymbol{u}_i\\b\boldsymbol{u}_i\end{bmatrix}$$

(1) ODE 的 齊次解：

$$Y_h = c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix} e^{-3t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{4t}$$

(2) 由待定係數法的理論可令 ODE 的特解爲

$$Y_p = (D_{2\times 1} + E_{2\times 1}\, t)\, e^{4t} \tag{2}$$

將 (2) 式代回 (1) 式中可得

$$E\, e^{4t} + (D + E\, t)\, 4\, e^{4t} = A(D + E\, t)e^{4t} + Be^{4t}$$

比較係數可得

$$E + 4D = AD + B \tag{3}$$

$$4E = AE \tag{4}$$

由 (4) 式可知 E 爲矩陣 A 特徵值 $\lambda = 4$, 所對應的特徵向量, 故取

$$E = \alpha V_2 = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{5}$$

再由 (3) 式可得

$$(AD - 4D) = E - B \;\Rightarrow\; (A - 4I)D = E - B \tag{6}$$

將 $D = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}$、$B = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix}$ 及 (5) 式代回 (6) 式整理可得

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 5 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha - 5 \\ \alpha + 2 \end{bmatrix}$$

即

$$\begin{cases} -2d_1 + 2d_2 = \alpha - 5 \\ 5d_1 - 5d_2 = \alpha + 2 \end{cases} \tag{7}$$

由 (7) 式可得

$$-\frac{2}{5}(\alpha + 2) = \alpha - 5$$

可解得 $\alpha = 3$，再由 (7) 式，令 $d_2 = 0$，可得 $d_1 = 1$，故

$$D = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \;,\; E = \alpha V_2 = 3V_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

因此 ODE 的特解爲

$$Y_p = (D + E\, t)e^{4t} = (\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} t)\, e^{4t} = \begin{bmatrix} 1 + 3t \\ 3t \end{bmatrix} e^{4t}$$

(3) ODE 的通解：

$$Y = Y_h + Y_p = c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix} e^{-3t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{4t} + \begin{bmatrix} 1 + 3t \\ 3t \end{bmatrix} e^{4t}$$

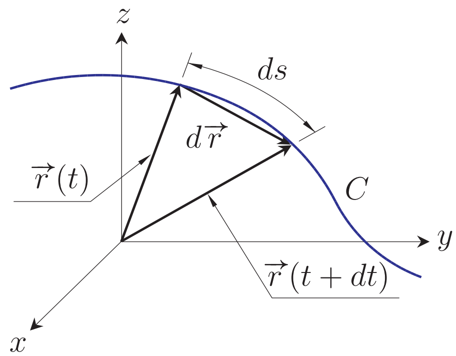


Figure 12.9: 空間曲線的弧長

(a) 設平面曲線爲 $y = f(x)$ 則

$$\vec{r}(x) = x\vec{i} + y\vec{j} = x\vec{i} + f(x)\vec{j}$$

故

$$\frac{d\vec{r}}{dx} = \vec{i} + \frac{df}{dx}\vec{j}$$

因此

$$ds = |\frac{d\vec{r}}{dx}|\,dx = \sqrt{1 + (\frac{df}{dx})^2}\,dx$$

(b) 設平面曲線爲 $\rho = \rho(\theta)$ 則

$$\vec{r}(\theta) = x\vec{i} + y\vec{j} = \rho(\theta)\cos\theta\,\vec{i} + \rho(\theta)\sin\theta\,\vec{j}$$

即

$$\frac{d\vec{r}}{d\theta} = (\frac{d\rho}{d\theta}\cos\theta - \rho\sin\theta)\vec{i} + (\frac{d\rho}{d\theta}\sin\theta + \rho\cos\theta)\vec{j}$$

故

$$ds = |\frac{d\vec{r}}{d\theta}|\,d\theta = \sqrt{\frac{d\vec{r}}{d\theta}\cdot\frac{d\vec{r}}{d\theta}}\,d\theta = \sqrt{(\frac{d\rho}{d\theta})^2 + \rho^2}\,d\theta$$

3. Frenet-Serret formulas:*

設曲線 C 的位置向量爲 $\vec{r}(s)$ (如圖 12.10) , 其中 s 爲曲線的弧長

(1) 單位切向量 $\vec{e_t}$ (Unit tangent vector) :

$$\vec{e_t} = \frac{d\vec{r}(s)}{ds}$$

*Jean Frédéric Frenet(Feb 1816~June 1900) 法國數學家。Joseph Alfred Serret(Aug 1819~March 1885) 法國數學家。本公式 Frenet 在1852年發表在" *Journal de mathematique pures et appliques*" 上。

因 $\vec{n}\,ds = dy\,\vec{i} - dx\,\vec{j}$，故

$$\begin{aligned}
&\vec{f}\cdot(\vec{n}\,ds) = (\nabla\phi + \nabla\times\vec{u})\cdot(dy\,\vec{i} - dx\,\vec{j}) \\
&= \{(1+\frac{2x}{x^2+y^2})\vec{i} + \frac{2y}{x^2+y^2}\vec{j} + (y^2\cos x + x^2\sin y)\vec{k}\}\cdot(dy\,\vec{i} - dx\,\vec{j}) \\
&= (1+\frac{2x}{x^2+y^2})\,dy - \frac{2y}{x^2+y^2}\,dx \qquad (2)
\end{aligned}$$

且 C_1 : $x^2+y^2=\rho^2$ $(\rho\to 0^+)$，則 $x=\rho\cos\theta$、$y=\rho\sin\theta$；$\theta=0\sim 2\pi$，將 (2) 式代回 (1) 式可得

$$\begin{aligned}
\oint_C \vec{f}\cdot\vec{n}\,ds &= \oint_{C_1}\vec{f}\cdot\vec{n}\,ds \\
&= \oint_{C_1}(1+\frac{2x}{x^2+y^2})\,dy - \frac{2y}{x^2+y^2}\,dx \\
&= \int_0^{2\pi}(1+\frac{2\rho\cos\theta}{\rho^2})\,d(\rho\sin\theta) - \frac{2\rho\sin\theta}{\rho^2}\,d(\rho\cos\theta) \\
&= \rho\sin\theta\Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} 2\,d\theta \\
&= 0 + 2\cdot 2\pi = 4\pi
\end{aligned}$$

15. Consider a vector field $\vec{F} = \frac{x}{x^2+y^2}\vec{i} + \frac{y}{x^2+y^2}\vec{j}$ defined in $(x\,,\,y)$ plane. Let C denote a closed circle of radius 1 centered at the origin, D be the region bounded by C, and $\vec{n}$ the unit vector normal to the circle

(a) Evaluate $\nabla\cdot\vec{F}$.

(b) Evaluate the line integral $\oint_C(\vec{F}\cdot\vec{n})ds$ along the closed circle C.

(c) Does the Divergence Theorem $\oint_C(\vec{F}\cdot\vec{n})ds = \iint_D(\nabla\cdot\vec{F})dA$ hold true in this case ? If not, please give reason why the theorem does not apply here.

《台大機械》

《解》 ☞

(a)

$$\begin{aligned}
\nabla\cdot\vec{F} &= \frac{\partial}{\partial x}(\frac{x}{x^2+y^2}) + \frac{\partial}{\partial y}(\frac{y}{x^2+y^2}) \\
&= \frac{-2x^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{1}{x^2+y^2} + \frac{-2y^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{1}{x^2+y^2} \\
&= 0
\end{aligned}$$

習題解答

1. -2π　2. $2\pi\cdot 4=8\pi$　3. 9π　4. $-\frac{1}{4}+\cos 1-\frac{1}{2}\sin 1$

5. 0　6. $-\frac{140}{3}$　7. $-\frac{\pi}{2}$　8. 36π　9. $-\frac{3}{2}\cos 2+\frac{3}{2}\sin 2-\frac{3}{2}\sin 1$

10. 32π　11. $-\frac{\pi}{4}-\frac{2}{\pi}$　12. $a^2\pi$　13. 2

14. 60π　15. 10π　16. 0　17. 10π　18. 16π

19. 3　20. (a) 16　(b) 6π　21. 6π　22. (a) $-\pi$　(b) 2π　(c) 0　23. 2π

24. $\frac{3}{2}$　25. $\frac{62\pi}{5}$　26. -8　27. $6\pi ah$　28. 2π　29. $\frac{9\pi}{10}$

30. 証明題

31. 0

32. $\pm 4\pi$ (注意本題的曲面不含 $z=0$)

33. 証明題

34. 2π

35. -40π

36. $\frac{45}{2}$

37. $\frac{3}{2}$

38. $\iint_S (\nabla\times\vec{F})\cdot\vec{n}\,dA=0$ 、$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r}=0$

再比較可得 $v(x\,,\,y) = \frac{3}{2}x^2y^2 - \frac{1}{4}y^4 - \frac{1}{4}x^4 + c$

28. If $f(z) = u(x\,,\,y) + iv(x\,,\,y)$, where $z = x + iy$ is analytic function and $u(x\,,\,y) = \dfrac{x+y}{x^2+y^2}$ find $v(x\,,\,y) = ?$ and $f(z) = ?$ 《北科大機電整合》

《解》 ☞ 因 $f(z) = u(x\,,\,y) + iv(x\,,\,y)$ 爲可解析，由 Cauchy-Riemann 方程式可知

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{x^2+y^2} + \frac{2y(x+y)}{(x^2+y^2)^2} \tag{1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x(x+y)}{(x^2+y^2)^2} \tag{2}$$

由 (1) 式可得

$$\begin{aligned} v(x\,,\,y) &= \int^x \{-\frac{1}{x^2+y^2} + \frac{2y(x+y)}{(x^2+y^2)^2}\}\,dx = \int^x \frac{-x^2+y^2+2yx}{(x^2+y^2)^2}\,dx \\ &= \int^x \{\frac{(x^2+y^2)-2x^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{2yx}{(x^2+y^2)^2}\}\,dx \\ &= \int^x \{\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x^2}{(x^2+y^2)^2}\}\,dx + \int^x \frac{2yx}{(x^2+y^2)^2}\,dx \\ &= \frac{x}{x^2+y^2} + \int^x \frac{2x^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx - \int^x \frac{2x^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx - \boxed{\frac{y}{(x^2+y^2)}} \\ &= \frac{x-y}{x^2+y^2} + h_1(y) \end{aligned} \tag{3}$$

同理再由 (2) 式，可得

$$v(x\,,\,y) = \int^y \{\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x(x+y)}{(x^2+y^2)^2}\}\,dy = \frac{x-y}{x^2+y^2} + h_2(x) \tag{4}$$

比較 (3)、(4) 式可得

$$v(x\,,\,y) = \frac{x-y}{x^2+y^2} + c$$

故

$$\begin{aligned} f(z) &= u(x\,,\,y) + iv(x\,,\,y) = \frac{x+y}{x^2+y^2} + i(\frac{x-y}{x^2+y^2} + c) \\ &= \frac{(x-iy)+i(x-iy)}{x^2+y^2} + ic = \frac{\overline{z}+i\overline{z}}{z\,\overline{z}} + ic \\ &= \frac{1+i}{z} + c \quad (\ c \text{ 爲任意常數 }) \end{aligned}$$

令 $f(z)=\dfrac{2}{z^2(iz-2)}$, 故 $f(z)$ 在 C 內具有 $z=0$ 的 2 階 pole, 且

$$\text{Res } f(0)=\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}(\frac{2}{iz-2})=-\frac{i}{2}$$

因此

$$\oint_C \frac{\overline{z}}{\overline{z}-(i/2)}\,d\overline{z}=\oint_C \frac{2}{z^2(iz-2)}dz=2\pi i\,\text{Res } f(0)=2\pi i\,(-\frac{i}{2})=\pi$$

26. Evaluate the complex integral $\oint_C z^2 \sin\overline{z}\,dz$ over the closed contour C defined by $|z|=1$. 《台大機械》

《解》☞ 因 C : $|z|=1$, 由 $z\overline{z}=|z|^2=1$, 故 $\overline{z}=\dfrac{1}{z}$, 則

$$\int_C z^2 \sin\overline{z}\,dz=\int_C z^2\sin\frac{1}{z}\,dz$$

令 $f(z)=z^2\sin\dfrac{1}{z}$, 故 $f(z)$ 在 C 內具有 $z=0$ 的本性奇點 , 且 $f(z)$ 對 $z=0$ 展開的 Laurent's 級數爲

$$f(z)=z^2\,\sin\frac{1}{z}=z^2(\frac{1}{z}-\frac{1}{3!}\frac{1}{z^3}+\cdots)$$

故 Res $f(0)=-\dfrac{1}{6}$, 則

$$\int_C z^2\,\sin\overline{z}\,dz=\int_C z^2\,\sin\frac{1}{z}\,dz=2\pi i\,\text{Res } f(0)=2\pi i\,(-\frac{1}{6})=-\frac{\pi i}{3}$$

27. Evaluate $\oint_C z^2\exp(\dfrac{2}{z})dz=?$ $\quad C$: $|z|=2$. 《中央電機》

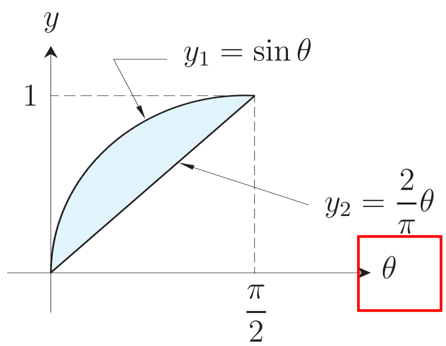
《解》☞ 令 $f(z)=z^2\exp(\dfrac{2}{z})$, 故在 $z=0$ 處爲本性奇異點 , 又

$$\exp(\frac{2}{z})=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(\frac{2}{z})^n=1+(\frac{2}{z})+\frac{1}{2!}(\frac{2}{z})^2+\frac{1}{3!}(\frac{2}{z})^3+\cdots$$

《証》 ☞ 因 Γ 為 $|z|=R$，即 $z=Re^{i\theta}$、$\theta=0\sim\pi$，故

$$\begin{aligned}\lim_{R\to\infty}\left|\int_\Gamma e^{imz}F(z)dz\right| &= \lim_{R\to\infty}\left|\int_0^\pi e^{imRe^{i\theta}}F(Re^{i\theta})iRe^{i\theta}\,d\theta\right| \\ &\le \lim_{R\to\infty}\int_0^\pi |e^{imR\cos\theta-mR\sin\theta}F(Re^{i\theta})iRe^{i\theta}|d\theta \\ &= \lim_{R\to\infty}\int_0^\pi e^{-mR\sin\theta}|F(Re^{i\theta})|R\,d\theta \\ &\le \lim_{R\to\infty}\frac{M}{R^{k-1}}\int_0^\pi e^{-mR\sin\theta}d\theta \\ &= \lim_{R\to\infty}\frac{2M}{R^{k-1}}\int_0^{\pi/2} e^{-mR\sin\theta}d\theta\end{aligned}$$

因當 $0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}$ 時 $\sin\theta\ge\dfrac{2\theta}{\pi}$（証明如下圖）



$\sin\theta\ge\dfrac{2\theta}{\pi}\ (0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2})$

故

$$\begin{aligned}\lim_{R\to\infty}\frac{2M}{R^{k-1}}\int_0^{\pi/2}e^{-mR\sin\theta}d\theta &\le \lim_{R\to\infty}\frac{2M}{R^{k-1}}\int_0^{\pi/2}e^{-mR2\theta/\pi}d\theta \\ &= \lim_{R\to\infty}\frac{\pi M}{mR^k}(1-e^{-mR})=0 \quad (\text{因 } k>0)\end{aligned}$$

即 $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_\Gamma e^{imz}F(z)dz=0$

15. 用 residue 定理求積分值 $I=\displaystyle\int_0^\infty\frac{x^2}{x^4+1}dx$。 《成大光電》

《解》 ☞ 令 $f(z)=\dfrac{z^2}{z^4+1}$，由 $z^4+1=0$, 可得

$$z^4=-1=e^{(2k\pi+\pi)i}\ \Rightarrow\ z=e^{\frac{(2k\pi+\pi)i}{4}}\quad(k=0,1,2,3)$$