

翻轉工程數學上冊

勘誤檔案

喻超凡 喻超弘編著



喻超凡數位企業有限公司

版權所有 翻印必究

精選習題

1. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^{100} + 1}$ 《成大機械》

2. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^6 + 1} dx$ 《交大機械》

3. $\int_0^{\infty} \frac{1}{x^4 + 1} dx$ 《台大土木、交大機械》

4. $\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{1 + x^3} dx$ 《台科大機械》

5. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{1 + x^n}$; $(n \in \mathbb{N} ; n \geq 2)$ 《成大電機》

6. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1 + x^2)^n}$; $(n \in \mathbb{N})$ 《成大土木》

7. $\int_0^{\infty} \frac{x^{2a-1}}{1 + x} dx$; $(0 < a < \frac{1}{2})$ 《成大電機》

8. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(1 + x^4)^2} dx$ 《交大應化》

9. Let $\Gamma(t) = \int_0^{\infty} x^{t-1} e^{-x} dx$. Find $\Gamma(n + \frac{1}{2})$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). 《中央通訊》

10. 令 m 和 n 為整數, 其中 $0 \leq m < n$ 。求 $\int_0^{\infty} \frac{x^{2m}}{x^{2n} + 1} dx$ 。 《北科大光電》

11. Evaluate the following integrals $(\alpha > 0)$ 《交大應化》

(a) $\int_0^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx$ (b) $\int_0^{\infty} x e^{-\alpha x^2} dx$ (c) $\int_0^{\infty} x^2 e^{-\alpha x^2} dx$.

第 2 章 一階 ODE 及其應用

2.1 微分方程式總論

2.1.1 基本定義

1. 定義：描述未知函數及其導數與變數之間的關係式，稱為微分方程式 (Differential Equation) 一般以 DE 來表示。

2. 分類：

(1) 常微分方程式 (Ordinary Differential Equation)*：

在 DE 中未知函數為單變數函數時，稱為常微分方程式，簡記為 ODE。

(2) 偏微分方程式 (Partial Differential Equation)：

在 DE 中未知函數為多變數函數時，稱為偏微分方程式，簡記為 PDE。

3. 基本名詞定義：

(1) 階數 (order)[†]：DE 中所含最高階導數之階數稱為 DE 之階數。

(2) 次數 (degree)：將 DE 化為有理整式 (即未知函數及其導數之次數均為非負整數) 所得最高階導數之次數即為該 DE 之次數。

*If an equation contains only ordinary derivatives of one or more dependent variables with respect to a single independent variable it is said to be an ordinary differential equation (ODE). An equation involving partial derivatives of one or more dependent variables of two or more independent variables is called a partial differential equation (PDE). 參考 Dennis G. Zill Michael R. Cullen, *Differential Equation With Boundary-Value Problems*, 7th Edition, pp.2-3, ISBN-13:978-0-495-10836-8

[†]常見的常微分符號：

1. y' 、 y'' 、 y''' 、 y^{iv} 、 $\dots$ (Lagrange 1797 採用的, Newton 1704 用 $\dot{y}$ 、 $\ddot{y}$)

2. $y^{(1)}$ 、 $y^{(2)}$ 、 $\dots$ 、 $y^{(n)}$ 、 $\dots$ (Lagrange 採用的)

3. $\frac{dy}{dx}$ 、 $\frac{d^2y}{dx^2}$ 、 $\dots$ 、 $\frac{d^ny}{dx^n}$ 、 $\dots$ (Leibniz 在 1684 年採用的)

4. Dy 、 D^2y 、 $\dots$ 、 D^ny 、 $\dots$ (1800 年法國數學 Louis Francois Antoine Arbogast 採用的, 而 Cauchy 也採用類似的記號, 用 $D_x^m f(x)$ 表示函數 $f(x)$ 對 x 的 m 階導數。)

- (3) 線性 (linear) : 在 DE 中未知函數及其導數 (與變數無關) 均滿足
- (a) 次數為一次。
 - (b) 無互乘之項。
 - (c) 無非線性函數。

則稱此 DE 為線性微分方程式。反之, 稱 DE 為非線性微分方程式。

2.1.2 常微分方程式的解

1. 解(solution) 之定義 :

凡是能夠滿足 ODE 的函數, 即稱為 ODE 的解。

2. 解的分類 : 設 n 階 ODE 為 $y^{(n)}(x) = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$

- (1) 通解 : 若 ODE 的解 $y = y(x)$ 中, 任意獨立常數的個數, 等於此 ODE 的階數時, 此解稱為 ODE 的通解 (general solution)。
- (2) 特解 : 若 ODE 的解 $y = y(x)$, 是由通解所求得的, 且不含任意常數, 此解稱為 ODE 的特解 (particular solution)。
- (3) 異解* : 若在一階 ODE 的初始值問題中 (initial value problem), ODE 的解不唯一時, 則不屬於通解的解 $y = y(x)$, 稱為 ODE 的異解 (singular solution), 一階 ODE 的異解 **”僅” 可能發生在一階高次非線性的 ODE 中**。

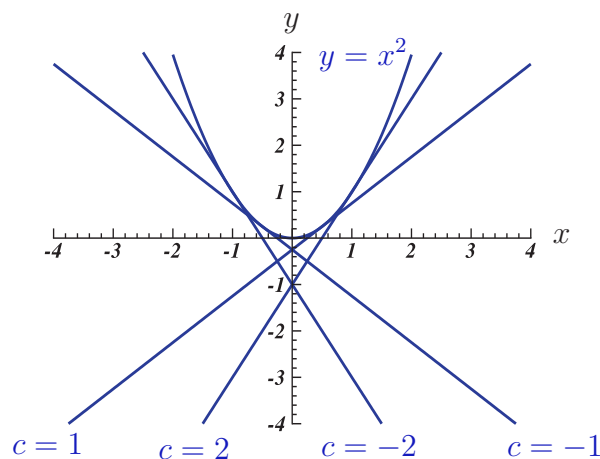
3. ODE 解的幾何意義 :

- (1) ODE 的通解, 表示 xy 平面上的某一曲線族 (family of integral curves)。而特解為此曲線族中的某一條曲線。
- (2) 一階 ODE 的異解, 為通解曲線族的包絡線 (envelope curve) 或公切線 (common tangent line)。

*最早的異解的例子, 是由英國數學家 Brook Taylor (August 1685~ November 1731) 發現的, 20年後法國數學家 Alexis Claude Clairaut (May 1713~May 1765) 也研究了一類具有奇異解的微分方程式, 異解的定義, 在大部分的工程數學課本中定義成 “不屬於通解的解, 稱為特解”, 這個定義比較不嚴謹精確, 有興趣的讀者可參考 Shyuichi Izumiya, Jianming Yu, Kodai Mathematical Journal 16 (1993), pp.227-234, *How to Define Singular Solutions*, 及 Shyuichi Izumiya, Bing Li and Jianming Yu, Kodai Mathematical Journal 17(1994), pp.644-649, *A Survey on Singular Solutions of First-Order Partial Differential Equations*, 本書異解的定義是參考, 國立編譯館部定大學用書編審委員會主編, 朱越生編著, 部定大學用書工程數學(上冊), pp. 290, 國立編譯館主編, 正中書局印行, 民國61年, 及 Vladimir A., Dobrushkin, *Applied Differential Equations with Boundary Value Problems*, pp.9, ISBN : 978-1-4987-3365-6, 及 Shair Ahmad, Antonio Ambrosetti, *A Textbook on Ordinary Differential Equations*, second Edition, pp62, ISBN : 978-3-319-16407-6, 及 Math 24, Retrieved from <https://math24.net/singular-solutions-differential-equations.html> (January 4, 2022) 及 Wikipedia, Retrieved from https://en.wikipedia.org/wiki/Singular_solution (January 4, 2022)

《解》☞ $y = cx - \frac{1}{4}c^2$ 為 ODE 的通解，而 $y = x^2$ 為 ODE 的異解。

異解為 ODE 通解的包絡線。

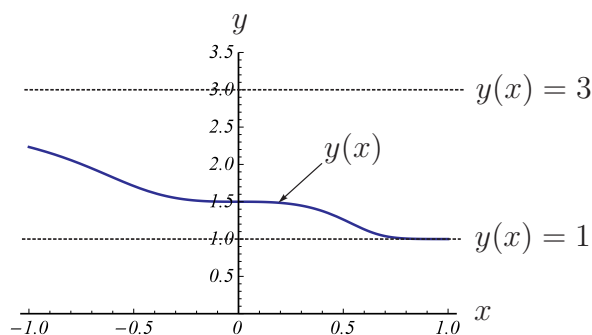


5. Consider the initial value problem $y' = x^2 y(1-y)(3-y)^5$, $y(0) = 1.5$. Explain why the (unique) solution always lies between 1 and 3. 《交大電控》

《解》☞ 因 $y(x) = 0$, $y(x) = 1$, $y(x) = 3$ 均為 ODE 的常數解^{*},

$$f(x, y) = x^2 y(1-y)(3-y)^5$$

則 $f(x, y)$ 、 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 在 $(0, 1.5)$ 的鄰域中為連續的函數，由 197 頁的 Picard's 唯一定理可知，ODE 的解存在且唯一，故 ODE 通過點 $(0, 1.5)$ 的解曲線，一定不會與曲線 $y(x) = 1$ 、 $y(x) = 3$ 相交，即 ODE 的解一定介於函數 $y(x) = 1$ 與 $y(x) = 3$ 之間。本題 ODE 的解如下圖。



^{*} $y(x) = 0$ 亦稱為 trivial solution. A solution of a differential equation that is identically zero on an interval I is said to be a trivial solution. 讀者請參考 Dennis G. Zill Michael R. Cullen, *Differential Equation With Boundary-Value Problems*, 7th Edition, pp.5, ISBN-13:978-0-495-10836-8

函數 $\phi(x, y)$ 的另外求法：^{*}

設 (x_0, y_0) 為區域 D 中的任一點, 若 $\frac{\partial M}{\partial y}$ 、 $\frac{\partial N}{\partial x}$ 在矩形的區域 D 中為連續, 則

$$\phi(x, y) = \int_{x_0}^x M(x, y) dx + f(y) \quad (2.4)$$

對 (2.4) 式取變數 y 的偏導數, 可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left[\int_{x_0}^x M(x, y) dx + f(y) \right] \\ &= \int_{x_0}^x \frac{\partial M}{\partial y}(x, y) dx + f'(y) \quad \left(\text{代入 } \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \right) \\ &= \int_{x_0}^x \frac{\partial N}{\partial x}(x, y) dx + f'(y) \\ &= N(x, y) - N(x_0, y) + f'(y) \\ &= N(x, y) \quad ; \quad \left(\text{由 (2.2) 式, 可知 } \frac{\partial \phi}{\partial y} = N(x, y) \right) \end{aligned}$$

整理上式可得 $f'(y) = N(x_0, y)$, 故

$$f(y) = \int_{y_0}^y f'(y) dy = \int_{y_0}^y N(x_0, y) dy$$

將 $f(y)$ 代回 (2.4) 式中可得

$$\phi(x, y) = \int_{x_0}^x M(x, y) dx + f(y) = \int_{x_0}^x M(x, y) dx + \int_{y_0}^y N(x_0, y) dy \quad (2.5)$$

同理亦可求得

$$\phi(x, y) = \int_{x_0}^x M(x, y_0) dx + \int_{y_0}^y N(x, y) dy \quad (2.6)$$

^{*}本公式的來源, 讀者可參考 Peter V. O'Neil, *Advanced Engineering Mathematics*, 7th Edition, pp.23, ISBN-13: 978-1-111-42741-2

7. Determine a function $M(x, y)$ so that the following differential equation is exact. $M(x, y) dx + (xe^{xy} + 2xy + \frac{1}{x}) dy = 0$ 《中央數學》

《解》因 ODE

$$M(x, y) dx + (xe^{xy} + 2xy + \frac{1}{x}) dy = 0$$

為正合, 故

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(xe^{xy} + 2xy + \frac{1}{x}) = e^{xy} + xye^{xy} + 2y - \frac{1}{x^2}$$

因此

$$\begin{aligned} M(x, y) &= \int^y (e^{xy} + xye^{xy} + 2y - \frac{1}{x^2}) dy \\ &= ye^{xy} + y^2 - \frac{y}{x^2} + f(x) \end{aligned}$$

其中 $f(x)$ 為變數 x 的任意函數。

8. Solve $(xy + y^2 + 1) dx + (xy + x^2 + 1) dy = 0$.

《台大生機》

《解》原 ODE 可改寫成

$$xy dx + y^2 dx + dx + xy dy + x^2 dy + dy = 0$$

整理可得

$$(xy dx + x^2 dy) + (y^2 dx + xy dy) + dx + dy = 0$$

即

$$x(y dx + x dy) + y(y dx + x dy) + (dx + dy) = 0$$

故

$$(x + y)(y dx + x dy) + d(x + y) = 0$$

令 $x + y \neq 0$ 兩端同乘 $\frac{1}{x + y}$, 可得

$$d(xy) + \frac{d(x + y)}{(x + y)} = 0$$

對上式兩端積分

$$\int d(xy) + \int \frac{d(x+y)}{(x+y)} = c$$

可得 $xy + \ln|x+y| = c$, 兩端取指數化簡, 可得 ODE 的通解為

$$e^{xy}(x+y) = c_1$$

當 $x+y=0$, 亦滿足 ODE, 故 $x+y=0$ 為 ODE 的一解*。

9. Solve $(x - 4x^2y^3) dy + (4x^4 - y) dx = 0$.

《交大電子》

《解》☞ 原 ODE 可改寫成

$$x dy - 4x^2y^3 dy + 4x^4 dx - y dx = 0$$

即

$$x dy - y dx - 4x^2y^3 dy + 4x^4 dx = 0$$

令 $x \neq 0$, 故

$$\frac{d(yx^{-1})}{x^{-2}} - 4x^2y^3 dy + 4x^4 dx = 0 ; (x \neq 0)$$

$$x^2 d\left(\frac{y}{x}\right) - 4x^2y^3 dy + 4x^4 dx = 0$$

兩端同乘 $\frac{1}{x^2}$ 可得

$$d\left(\frac{y}{x}\right) - 4y^3 dy + 4x^2 dx = 0$$

兩端積分

$$\int d\left(\frac{y}{x}\right) - \int 4y^3 dy + \int 4x^2 dx = c$$

可得 ODE 的通解為

$$\frac{y}{x} - y^4 + \frac{4}{3}x^3 = c$$

10. Solve the following differential equation

$$x(\ln y - \ln x) dy = (y \ln y - y \ln x - x) dx$$

《台大電機、北科大電通》

*事實上, 在求一階 ODE 解的過程中, 常常會乘上具有分母的積分因子, 而該積分因子分母為 0 的項 (以本題而言是 $x+y=0$), 一般也均為 ODE 的解, 不過這些解均可令 ODE 通解中的未知常數為 0, 或趨近 $\pm\infty$ 求得, 所以在大部分的微分方程式課本中, 並不稱這種解為 ODE 的異解, 讀者可參考 100 頁中的參考文獻。

則 ODE 的通解爲

$$y(x) = \int y'(x) dx = \int \pm \frac{x}{\sqrt{c_2 - x^2}} dx = \mp \sqrt{c_2 - x^2} + c_3 \quad (2)$$

(b) 由 (2) 式可得

$$y(x) = \sqrt{c_2 - x^2} + c_3 \quad \text{且} \quad y'(x) = -\frac{x}{\sqrt{c_2 - x^2}} \quad (3)$$

$$y(x) = -\sqrt{c_2 - x^2} + c_3 \quad \text{且} \quad y'(x) = \frac{x}{\sqrt{c_2 - x^2}} \quad (4)$$

將 $y'(1) = 1$ 代入 (3) 式不合，故將 $y'(1) = 1$ 、 $y(1) = 2$ 代入 (4) 式中可得

$$\begin{cases} y(1) = 2 = -\sqrt{c_2 - 1} + c_3 \\ y'(1) = 1 = \frac{1}{\sqrt{c_2 - 1}} \end{cases}$$

可解得 $c_2 = 2$ 、 $c_3 = 3$ ，因此

$$y(x) = -\sqrt{2 - x^2} + 3$$

5. 求解 $yy''(x) + [y'(x)]^2 - y'(x) = 0$ 。

《台科大營建》

《解》因 x 缺項，故令 $p(x) = y'(x)$ ，則 $y''(x) = p \frac{dp}{dy}$ ，代入原式得

$$yp \frac{dp}{dy} + p^2 - p = 0$$

即

$$p(y \frac{dp}{dy} + p - 1) = 0$$

故可得 $p = 0$ 或 $y \frac{dp}{dy} + p - 1 = 0$ 。

(1) $p = y'(x) = 0$ ，可得 $y(x) = c$ ，爲 ODE 的常數解。

(2) $y \frac{dp}{dy} + p - 1 = 0$ ，令 $p \neq 1$ ，分離變數可得

$$\frac{dp}{p-1} + \frac{1}{y} dy = 0$$

則

$$\frac{y}{\sqrt{c_1 - y^2}} dy = \pm dx \quad \text{故} \quad \int \frac{y}{\sqrt{c_1 - y^2}} dy = \pm \int dx$$

積分可得

$$-\sqrt{c_1 - y^2} = \pm(x + c_2)$$

ODE 的通解爲

$$c_1 - y^2 = (x + c_2)^2$$

7. 求解 $yy''(x) = [y'(x)]^2 [1 - y'(x) \cos y + yy'(x) \sin y]$ 。 《交大機械》

《解》因 x 缺項，故令 $p = y'(x)$ ，則 $y''(x) = p \frac{dp}{dy}$ ，代入原式得

$$yp \frac{dp}{dy} = p^2(1 - p \cos y + yp \sin y)$$

故可得 $p = 0$ 或 $y \frac{dp}{dy} = p(1 - p \cos y + yp \sin y)$ 。

(1) $p = y'(x) = 0$ ，可得 $y(x) = c$ ，爲 ODE 之一解。

(2) $y \frac{dp}{dy} = p(1 - p \cos y + yp \sin y)$ ，可化簡成

$$y \frac{dp}{dy} - p = p^2(-\cos y + y \sin y)$$

或

$$\frac{1}{p^2} \frac{dp}{dy} - \frac{1}{y} p^{-1} = \frac{1}{y}(-\cos y + y \sin y) \quad (1)$$

令 $z = p^{-1}$ ，故 $\frac{dz}{dy} = -\frac{1}{p^2} \frac{dp}{dy}$ ，代回 (1) 式中得

$$\frac{dz}{dy} + \frac{1}{y} z = \frac{1}{y}(\cos y - y \sin y) \quad (2)$$

故 (2) 式爲以 z 爲函數， y 爲變數的一階線性 ODE，其積分因子爲

$$I = \exp\left(\int \frac{1}{y} dy\right) = e^{\ln|y|} = y$$

則

$$Iz = \int y \cdot \frac{1}{y} (\cos y - y \sin y) dy = \sin y + y \cos y - \sin y + c_1$$

即

$$z = p^{-1} = \frac{y \cos y + c_1}{y}$$

故

$$p = \frac{dy}{dx} = \frac{y}{y \cos y + c_1} \quad \text{因此} \quad \frac{y \cos y + c_1}{y} dy = dx$$

兩端積分

$$\int \frac{y \cos y + c_1}{y} dy = \int dx$$

故 ODE 的通解為

$$\sin y + c_1 \ln |y| = x + c_2$$

8. Find $yy''(x) + (y+1)[y'(x)]^2 = 0$.

《成大電機》

《解》因 x 缺項，故令 $p = y'(x)$ ，則 $y''(x) = p \frac{dp}{dy}$ ，代入原式得

$$yp \frac{dp}{dy} + (y+1)p^2 = 0$$

即

$$p \left[y \frac{dp}{dy} + (y+1)p \right] = 0$$

故可得 $p = 0$ 或 $y \frac{dp}{dy} + (y+1)p = 0$ 。

(1) $p = y'(x) = 0$ ，故 $y(x) = c$ ，為 ODE 之一解。

(2) $y \frac{dp}{dy} + (y+1)p = 0$ ，分離變數可得

$$\frac{1}{p} dp + \left(\frac{y+1}{y} \right) dy = 0$$

兩端積分得

$$\ln |p| + y + \ln |y| = c_1^*$$

兩端取指數得

$$pye^y = c_1 \quad ; \quad (c_1 = \pm e^{c_1^*})$$

整理可得 $(\frac{dp}{dy})^2 + y\frac{dp}{dy} - p = 0$, 即

$$p = y\frac{dp}{dy} + (\frac{dp}{dy})^2 \quad (1)$$

(1) 式為 Clairaut's 方程式

(a) 由 172 頁的公式, 可知 (1) 式的通解為 $p = c_1y + c_1^2$, 即 $\frac{dy}{dx} = c_1y + c_1^2$, 故

$$\frac{dy}{c_1y + c_1^2} = dx$$

兩端積分可得 ODE 的通解為

$$\frac{1}{c_1} \ln |c_1y + c_1^2| = x + c_2^*$$

兩端取指數整理可得

$$y(x) = \frac{1}{c_1}(c_2 e^{c_1x} - c_1^2)$$

(b) 由 172 頁的公式, 可知 (1) 式的異解為 $p = -\frac{y^2}{4}$, 即

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y^2}{4} \Rightarrow -\frac{dy}{y^2} = \frac{1}{4}$$

兩端積分可得

$$\frac{1}{y} = \frac{x}{4} + c$$

故 ODE 的異解為 $y(x) = \frac{1}{\frac{x}{4} + c}$

12. Solve $-yy''(x) + [y'(x)]^2 + 3xy^2 = 0$.

《台大土木》

《解》原 ODE 為對 y 及其導數而言, 是 2 次齊次方程式, 令 $y(x) = e^{z(x)}$, 故

$$y'(x) = z'(x)e^{z(x)}, \quad y''(x) = z''(x)e^{z(x)} + [z'(x)]^2e^{z(x)}$$

代入原式得

$$-e^{z(x)} [z''(x)e^{z(x)} + [z'(x)]^2e^{z(x)}] + [z'(x)]^2e^{2z(x)} + 3xe^{2z(x)} = 0$$

即

$$-z''(x) - [z'(x)]^2 + [z'(x)]^2 + 3x = 0$$

47. (1) Find the inverse Laplace transform of the function : $F(s) = \frac{1}{s} e^{\frac{1}{s}}$.
 (2) Suppose $F(s)$ is the Laplace transform of the function $f(t)$ and given by the equation $F(s) = \frac{1}{s} \exp\{\exp(-s)\}$. Find $f(\frac{7}{2})$. 《台聯A》

《解》 (1) 將 $e^{\frac{1}{s}}$ 展成 Maclaurin's 級數可得 ,

$$F(s) = \frac{1}{s} e^{\frac{1}{s}} = \frac{1}{s} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{s}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{s^{n+1}}\right)$$

故

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{s^{n+1}}\right)\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \mathcal{L}^{-1}\left\{\left(\frac{1}{s^{n+1}}\right)\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \frac{t^n}{n!}$$

(2) 將 $\exp\{\exp(-s)\}$ 展成 Maclaurin's 級數可得 ,

$$F(s) = \frac{1}{s} \exp\{\exp(-s)\} = \frac{1}{s} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (e^{-s})^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{s} e^{-ns}$$

則

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s} e^{-ns}\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} H(t-n)$$

即 $f(t) = H(t) + H(t-1) + \frac{1}{2}H(t-2) + \frac{1}{3!}H(t-3) + \frac{1}{4!}H(t-4) + \cdots$, 故

$$f\left(\frac{7}{2}\right) = H\left(\frac{7}{2}\right) + H\left(\frac{7}{2}-1\right) + \frac{1}{2}H\left(\frac{7}{2}-2\right) + \frac{1}{3!}H\left(\frac{7}{2}-3\right) + 0 + \cdots = \frac{8}{3}$$

48. Evaluate the inverse of the following Laplace Transform

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{s}(s-1)}\right\}$$

《北科大化工》

《解》 因 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{s}}\right\} = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2}) \cdot t^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{\pi} \cdot t^{1/2}}$, 故

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{s}} \cdot \frac{1}{(s-1)}\right\} &= \frac{1}{\sqrt{\pi} \cdot t^{1/2}} * e^t = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{e^{t-\tau}}{\tau^{1/2}} d\tau \quad ; \quad (\text{令 } \tau = z^2) \\ &= \frac{2e^t}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{t}} e^{-z^2} dz = e^t \operatorname{erf}(\sqrt{t}) \end{aligned}$$

代入原 ODE 可得

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - x \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

第1步將 $\sum$ 前的函數乘到 $\sum$ 內

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

第2步調整 x 的次幂，讓每一項的次幂相同

$$\sum_{n=-2}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

第3步再調整 $\sum$ 的下限

$$0 + 0 + \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

故

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+1)(n+2)a_{n+2} - (n-1)a_n] x^n = 0$$

比較係數可得循環式為

$$(n+1)(n+2)a_{n+2} - (n-1)a_n = 0 \quad ; \quad (n = 0, 1, 2, 3 \cdots)$$

$$a_{n+2} = \frac{(n-1)a_n}{(n+1)(n+2)} \quad ; \quad (n = 0, 1, 2, 3 \cdots)$$

將 $n = 0, 1, 2, 3, \cdots$ 代回上式可得

$$n = 0 \Rightarrow a_2 = \frac{-1}{1 \cdot 2} a_0$$

$$n = 1 \Rightarrow a_3 = \frac{0}{2 \cdot 3} a_1 = 0$$

$$n = 2 \Rightarrow a_4 = \frac{a_2}{3 \cdot 4} = \frac{-a_0}{4!}$$

$$n = 3 \Rightarrow a_5 = \frac{2a_3}{4 \cdot 5} = 0$$

$$n = 4 \Rightarrow a_6 = \frac{3a_4}{5 \cdot 6} = \frac{-1 \cdot 3a_0}{6!}$$

$\cdots \quad \cdots \quad \cdots$

故可得

$$a_{2n+1} = 0 \quad ; \quad (n = 1, 2, 3 \cdots \text{ 且 } a_1 \neq 0)$$

6.2.2 第一類 Bessel 函數

1. 定義

(1) μ 階第一類 Bessel 函數為
$$J_\mu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma(n+1+\mu)n!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\mu}$$

(2) $(-\mu)$ 階第一類 Bessel 函數為
$$J_{-\mu}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma(n+1-\mu)n!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-\mu}$$

定理 1 : 設 μ 階 Bessel 方程式為 $x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - \mu^2)y(x) = 0$, 若 $\mu \neq$ 整數 , 則 Bessel 方程式的通解為

$$y(x) = c_1 J_\mu(x) + c_2 J_{-\mu}(x)$$

定理 2 : 當 m 為整數時, 則 $J_{-m}(x) = (-1)^m J_m(x)$, 即 $J_m(x)$ 與 $J_{-m}(x)$ 為線性相依。

6.2.3 第二類與第三類 Bessel 函數

1. μ ($\mu \geq 0$) 階第二類 Bessel 函數 *

μ 階第二類 Bessel 函數定義成

$$Y_\mu(x) = \frac{\cos \mu\pi J_\mu(x) - J_{-\mu}(x)}{\sin \mu\pi}; \mu > 0 \text{ 且不為整數}$$

若 m 為非負的整數, 則

$$\begin{aligned} Y_m(x) &= \lim_{\mu \rightarrow m} Y_\mu(x) = \lim_{\mu \rightarrow m} \frac{\cos \mu\pi J_\mu(x) - J_{-\mu}(x)}{\sin \mu\pi} \\ &= \lim_{\mu \rightarrow m} \frac{-\pi \sin \mu\pi J_\mu(x) + \cos \mu\pi \frac{\partial J_\mu}{\partial \mu}(x) - \frac{\partial J_{-\mu}}{\partial \mu}(x)}{\pi \cos \mu\pi} \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\partial J_\mu}{\partial \mu}(x) - (-1)^m \frac{\partial J_{-\mu}}{\partial \mu}(x) \right] \Big|_{\mu=m} \end{aligned}$$

* μ 階第二類 Bessel 函數是由德國數學家 Carl Gottfried Neumann (May 1832~March 1925) 和他的父親 Franz Ernst Neumann (Sept 1798~May 1895) 的學生 Heinrich Martin Weber (May 1842~May 1913) 所提出的, 因此到現在有些教科書為了紀念 Neumann, μ 階第二類 Bessel 函數是以 $N_\mu(x)$ 來表示。

ODE 的通解爲

$$y(x) = c_1 \sin px + c_2 \cos px \quad (4)$$

且

$$y'(x) = c_1 p \cos px - c_2 p \sin px \quad (5)$$

將邊界條件 $y(0) = 0$ 代入 (4) 式可得 $c_2 = 0$, 再將邊界條件 $y'(0) = y(1)$ 代入 (4) 式與 (5) 式中, 可得 $c_1 p = c_1 \sin p$, 即

$$c_1(p - \sin p) = 0$$

因 $p - \sin p \neq 0$, 故 $c_1 = 0$, 將 $c_1 = c_2 = 0$ 代回 (4) 式中, 因此 $y(x) = 0$, 故 ODE 無非零解 (爲 trivial solution)。

- (2) 方程式的邊界條件不爲 Sturm–Liouville 的邊界條件, 因此 ODE 不爲 Sturm–Liouville 邊界值問題, 故不滿足具有無窮多個特徵值的結論。