

喻超凡  
翻轉  
教室叢書

喻超凡  
翻轉  
教室叢書

# 翻轉工程數學

上

喻超凡  
喻超弘  
喻婕  
編著

喻超凡  
Superyu

# 翻轉工程數學 上

Advanced Engineering Mathematics

喻超凡、喻超弘、喻婕 編著

喻超凡  
Superyu

喻超凡數位企業有限公司  
<http://www.superyu.idv.tw>

# 喻超凡老師的家

超凡小鋪網址：<http://www.pcstore.com.tw/superyu>



工數神父喻超凡 Facebook 網址：  
<http://www.facebook.com/mathsuperyu>



喻超凡雲端翻轉數學教室：<http://www.superyu.idv.tw>



# 序

數學是所有科學之母，洩漏天機的語言，所以不論是國內或是國外，只要是研習工程科學的科系，都將工程數學這一門學科，列為必修的課程，但是由於這一門課程的內容，過度的艱澀枯燥難學，因此就成為很多剛學習這門課程同學的一大夢魘，不知如何正確的去學習，不久就淪為死背公式答案的機器了，根本無法一窺工程數學這一門學問之精髓，更遑論要分析或是解決工程上的問題。

有鑑於此，喻超凡博士參考國內外著名的工程數學叢書（請參考參考文獻），以及喻超凡博士在全國各大著名的補習班及國立大學任教工程數學三十多年的教學心得，提綱挈領精編細撰，將工程數學中重要的觀念、公式及口訣，以結構化的方式放在每一章節的開始，並且精選國內外，各大著名的大學理工科系所研究所入學考的試題，加入每一章節的精選範例中，做整體詳細的思路與題型的分析和講解說明，同時在每一章節最後的挑戰範例中，加入觀念具有挑戰性或較為艱澀的題目，以及工程數學中有關高等微積分、高等線性代數等純理論的定理證明，精編細撰出這本“翻轉工程數學”，期能幫助同學在短時間內對工程數學能作全盤性的認識及了解，一窺工程數學之美，翻轉成績，翻轉未來。

最後喻超凡博士將工程數學中重要理論的定義、定理、公式的來源，及發展的過程和重要的數學家的生平事蹟... 等等的參考文獻，以註腳的方式加於各章節中，以增加閱讀本書的趣味性，進而使讀者能在趣味中了解工程數學的發展過程及整體的全貌。同時喻超凡博士亦有架設網路學校，將工程數學的基礎課程以開放課程的方式，放在雲端翻轉教室中，供同學參考及翻轉學習，網路學校的網址 <http://www.superyu.idv.tw>。

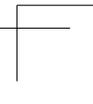
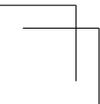
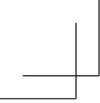
本書雖經多次修定及校對，但仍難免有所疏漏之處，敬請各位讀者不吝賜教。本書已獲全國各大補習班及學校採用為教科書，筆者在此致最大的謝意。



喻超凡雲端教室

喻超凡

2016. 1.



# 目錄

<b>1 基礎數學</b>	<b>1</b>
1.1 常用的定理	1
1.2 不定積分的基本性質	9
1.2.1 定義	9
1.2.2 基本積分公式	9
1.3 變數變換積分法	11
1.3.1 三角函數代換積分法	11
1.4 部分積分法(Integration by parts)	22
1.5 三角函數的積分	33
1.6 分式與根式函數的積分	45
1.6.1 部分分式展開	45
1.6.2 分式積分法	46
1.6.3 根式積分法	47
1.7 多變數函數的導數	60
1.7.1 偏導數	60
1.7.2 全微分(Total Differential)	60
1.7.3 鏈微法則(Chain rule)	60
1.7.4 高階導數	62
1.8 Leibniz 微分法則	75
1.8.1 函數積之微分	75
1.8.2 積分式之微分	75
1.9 Gamma、Beta、Dirac delta 函數	82
1.9.1 Gamma 函數	82
1.9.2 Beta 函數	83
1.9.3 Unit step 函數 (Heaviside 函數) 及 Dirac delta 函數	85
<b>2 一階 ODE 及其應用</b>	<b>99</b>
2.1 微分方程式總論	99

2.1.1	基本定義	99
2.1.2	常微分方程式的解	100
2.2	正合 ODE ( Exact ODE )	104
2.2.1	一階正合 ODE	104
2.2.2	積分因子(Integrating factor)	105
2.3	分離變數型微分方程式	133
2.3.1	直接分離變數型	133
2.3.2	可化簡成變數分離型	133
2.4	線性型微分方程式	150
2.4.1	一階線性 ODE	150
2.4.2	可線性化之 ODE	152
2.4.3	特殊的一階 ODE	153
2.5	一階高次常微分方程式	171
2.6	一階 ODE 的應用	179
2.7	一階 ODE 解的性質	199
2.7.1	Picard's 存在與唯一定理	199
2.7.2	Picard Method 近似解	200
<b>3</b>	<b>高階 ODE 及其應用</b>	<b>203</b>
3.1	高階線性 ODE 的基本理論	203
3.1.1	函數集合的線性相依與線性獨立	203
3.1.2	正規(normal) ODE 解的性質	205
3.2	常係數線性 ODE	224
3.2.1	齊次解 (homogeneous solution)	224
3.2.2	待定係數(Undetermined coefficients) 法求解特解 $y_p(x)$	236
3.2.3	Lagrange 參數變化 (Variation Parameter) 法求解特解 $y_p(x)$	237
3.2.4	Heaviside 逆運算法求解特解	267
3.3	等維線性常微分方程式	304
3.3.1	Euler - Cauchy 線性常微分方程式	304
3.3.2	Legendre 線性常微分方程式	305
3.4	二階變係數線性 ODE	329
3.4.1	二階正合 ODE	329
3.4.2	因式分解法	330
3.4.3	因變數變換法	331
3.4.4	自變數變換法	335
3.5	聯立線性 ODE	372
3.5.1	消去法求解聯立 ODE	372

3.5.2	行列式法求解聯立 ODE . . . . .	374
3.6	高階非線性 ODE . . . . .	395
3.7	高階ODE 的應用 . . . . .	414
<b>4</b>	<b>Laplace 轉換及其應用</b>	<b>429</b>
4.1	定義 . . . . .	429
4.2	基本性質與定理 . . . . .	438
4.2.1	常見的基本函數轉換 . . . . .	438
4.2.2	基本定理 . . . . .	438
4.3	特殊函數之Laplace 轉換 . . . . .	481
4.4	Laplace 轉換解微分方程式 . . . . .	498
4.5	Laplace 轉換解積分方程式 . . . . .	527
<b>5</b>	<b>常微分方程的冪級數解</b>	<b>537</b>
5.1	概論 . . . . .	537
5.2	常點展開求解 ODE . . . . .	543
5.2.1	直接求解法 . . . . .	543
5.2.2	待定係數法 . . . . .	543
5.3	規則奇異點展開法 . . . . .	566
<b>6</b>	<b>Bessel 方程式及 Bessel 函數</b>	<b>607</b>
6.1	Bessel 方程式的推導 . . . . .	607
6.2	Bessel 方程式的解 . . . . .	608
6.2.1	概論 . . . . .	608
6.2.2	第一類 Bessel 函數 . . . . .	610
6.2.3	第二類與第三類 Bessel 函數 . . . . .	610
6.3	可化簡為 Bessel 方程式的 ODE . . . . .	613
6.4	修正型之Bessel 方程式 . . . . .	623
6.5	Bessel 函數的性質 . . . . .	624
6.5.1	基本性質 . . . . .	624
6.5.2	遞迴關係式 . . . . .	626
<b>7</b>	<b>Legendre 方程式 Legendre 多項式</b>	<b>635</b>
7.1	Legendre 方程式的推導 . . . . .	635
7.2	Legendre 方程式的解 . . . . .	636
7.2.1	概論 . . . . .	636
7.2.2	Legendre 函數 . . . . .	639
7.3	Legendre 多項式的性質 . . . . .	645

7.3.1	母函數 . . . . .	645
7.3.2	遞迴關係式 . . . . .	645
7.3.3	Legendre 多項式的圖形 . . . . .	645
<b>8</b>	<b>邊界值問題與廣義的 Fourier 級數</b>	<b>655</b>
8.1	邊界值問題 . . . . .	655
8.1.1	概論 . . . . .	655
8.1.2	常用的圖形 . . . . .	655
8.2	函數的內積及其正交性質 . . . . .	695
8.2.1	定義 . . . . .	695
8.2.2	正交函數 . . . . .	695
8.2.3	Gram - Schmidt 正交化 . . . . .	696
8.3	Sturm-Liouville 邊界值問題 . . . . .	703
8.3.1	Formal adjoint differential . . . . .	703
8.3.2	Sturm-Liouville 方程式及邊界值問題 . . . . .	704
8.4	廣義 Fourier 級數 . . . . .	727
8.4.1	完備的正交函數集合 (complete orthogonal set) . . . . .	727
8.4.2	廣義 Fourier 級數 . . . . .	728
<b>9</b>	<b>Fourier 級數、積分、轉換及應用</b>	<b>757</b>
9.1	Fourier 級數 . . . . .	757
9.1.1	週期函數(Periodic function) . . . . .	757
9.1.2	Fourier 級數 . . . . .	758
9.1.3	週期奇偶函數的 Fourier 級數 . . . . .	760
9.1.4	Fourier 級數之複數型式 . . . . .	762
9.1.5	Fourier 級數之收斂性質 . . . . .	762
9.1.6	Fourier 級數逐項運算的性質 . . . . .	763
9.2	半幅展開(Half range expansion) . . . . .	806
9.3	雙重 Fourier 級數 . . . . .	823
9.4	Fourier 積分 (Fourier integral) . . . . .	825
9.5	Fourier 轉換 . . . . .	839
9.5.1	指數型 Fourier 轉換 . . . . .	839
9.5.2	Fourier-cosine 轉換與 Fourier-sine 轉換 . . . . .	843
9.6	從 Fourier 轉換推導出 Laplace 轉換 . . . . .	885

# 第 1 章 基礎數學

## 1.1 常用的定理

### 1. 三明治定理

- (1) 若  $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ ,  $\forall 0 < |x - a| < \delta$ , 且  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$   
則  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ 。
- (2) 若  $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ ,  $\forall x > k$  且  $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = L$   
則  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$

### 2. L'Hôpital Rule\*

- (1) 設  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ , 若  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$ , 則  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$ 。
- (2) 設  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$ 、 $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty$ , 若  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$ , 則  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$ 。

### 3. Bolzano 定理 (勘根定理)<sup>†</sup>

設  $f(x)$  在閉區間  $[a, b]$  上為連續, 若  $f(a) \cdot f(b) < 0$ , 則  $\exists c \in (a, b)$ , 使得  $f(c) = 0$

### 4. 積分均值定理

設  $f(x)$  在  $[a, b]$  上為連續,  $\exists c \in (a, b)$ , 使得  $\int_a^b f(x) dx = f(c)(b - a)$ 。其中  $f(c)$  稱為  $f(x)$  在  $[a, b]$  中的平均值。

### 5. 微積分基本定理 (Fundamental Theorem of the Calculus)

設  $f$  在  $[a, b]$  上為連續

- (1) 若  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ ,  $\forall x \in [a, b]$ , 則  $F'(x) = f(x)$ ,  $\forall x \in (a, b)$ 。

\*Guillaume Francois Antoine Marquis de L'Hôpital(1661~1704) 法國數學家。此一法則是 Johann Bernoulli(July 1667~Jan 1748) 首先發現的, 當時 L'Hôpital 正花錢請 Bernoulli 教授他微積分, 因此 Bernoulli 就用 L'Hôpital 來命名。L'Hôpital 正確的發音為 Low-pee-tall。

<sup>†</sup>Bernard Placidus Johann Nepomuk Bolzano(Oct 1781~Dec 1848) 捷克哲學家、數學家。



## 精選範例

1. 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x}$ 。

《解》  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{e^{\frac{1}{x^2}}}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{x^2}}{e^{\frac{1}{x^2}} \left(-\frac{2}{x^3}\right)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2e^{\frac{1}{x^2}}} = 0$

2. 求  $f(x) = \sin x$ , 在  $[0, \frac{\pi}{2}]$  的平均值。

《解》  $f(x)$  在  $[0, \frac{\pi}{2}]$  中的平均值為

$$f(c) = \frac{1}{\frac{\pi}{2} - 0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = \frac{2}{\pi} (-\cos x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}$$

3. 設  $f(x)$  為  $[d, d+2\ell]$  中的函數, 則  $f(x)$  的 Fourier 級數為

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{\ell} + b_n \sin \frac{n\pi x}{\ell} \right)$$

其中

$$a_0 = \frac{1}{2\ell} \int_d^{d+2\ell} f(x) \, dx$$

請問  $a_0$  的數學意義為何?

《解》由積分均值定理可知

$$a_0 = \frac{1}{2\ell} \int_d^{d+2\ell} f(x) dx = f(c)$$

為  $f(x)$  在  $[d, d+2\ell]$  中的平均值。

4. 已知三角形其三個頂點為  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$ ,  $(x_3, y_3)$ , 如果上述三角形之面積大於零, 請證明通過此三角形三頂點之圓方程式可寫成下列形式:

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

《解》設三角形的外接圓的方程式為  $a(x^2 + y^2) + bx + cy + d = 0$ , 因為通過  $(x_1, y_1)$ 、 $(x_2, y_2)$ 、 $(x_3, y_3)$ , 故

$$\begin{cases} a(x^2 + y^2) + bx + cy + d = 0 \\ a(x_1^2 + y_1^2) + bx_1 + cy_1 + d = 0 \\ a(x_2^2 + y_2^2) + bx_2 + cy_2 + d = 0 \\ a(x_3^2 + y_3^2) + bx_3 + cy_3 + d = 0 \end{cases}$$

因  $a$ 、 $b$ 、 $c$ 、 $d$  具有不全為 0 的解, 由 Cramer rule 可得三角形的外接圓的方程式為

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

5. 設  $\lim_{x \rightarrow a} b(x) = 1$ 、 $\lim_{x \rightarrow a} c(x) = \infty$ , 試證  $\lim_{x \rightarrow a} \{b(x)\}^{c(x)} = \exp\{\lim_{x \rightarrow a} c(x)[b(x) - 1]\}$

《証》 令  $b(x) = 1 + \frac{1}{v(x)}$ , 則  $v(x) = \frac{1}{b(x) - 1}$ , 因  $\lim_{x \rightarrow a} b(x) = 1$ , 故

$$\lim_{x \rightarrow a} v(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{b(x) - 1} = \pm\infty$$

因此

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \{b(x)\}^{c(x)} &= \lim_{x \rightarrow a} \left\{1 + \frac{1}{v(x)}\right\}^{c(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \left\{\left(1 + \frac{1}{v(x)}\right)^{v(x)}\right\}^{\frac{c(x)}{v(x)}} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \left\{\left(1 + \frac{1}{v(x)}\right)^{v(x)}\right\}^{\lim_{x \rightarrow a} \frac{c(x)}{v(x)}} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \left\{\left(1 + \frac{1}{v(x)}\right)^{v(x)}\right\}^{\lim_{x \rightarrow a} c(x)[b(x) - 1]} \\ &= \exp\left\{\lim_{x \rightarrow a} c(x)[b(x) - 1]\right\} \end{aligned}$$

6. 求下列之極限值：

(a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^{bx}$

(b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1 - \cos x}}$

(c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x$

(d)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$

《解》

(a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^{bx} = \exp\left\{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x} - 1\right)(bx)\right\} = \exp\{ab\} = e^{ab}$

(b)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1 - \cos x}} &= \exp\left\{\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} - 1\right)\left(\frac{1}{1 - \cos x}\right)\right\} \\ &= \exp\left\{\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x - x}{x \cdot x^2}\right)\left(\frac{x^2}{1 - \cos x}\right)\right\} \\ &= \exp\left\{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 - \cos x}\right\} \\ &= \exp\left\{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\sin x}\right\} \\ &= \exp\left\{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{6x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\cos x}\right\} \\ &= \exp\left\{-\frac{1}{6} \cdot 2\right\} = \exp\left\{-\frac{1}{3}\right\} = e^{-\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x &= \exp\left\{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+a}{x-a} - 1\right)x\right\} \\ &= \exp\left\{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+a-x+a}{x-a} \cdot x\right\} \\ &= \exp(2a) = e^{2a}\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} &= \exp\left\{\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + b^x}{2} - 1\right) \frac{1}{x}\right\} \\ &= \exp\left\{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x + b^x - 2}{2x}\right\} \\ &= \exp\left\{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x \ln a + b^x \ln b}{2}\right\} \\ &= \exp\left\{\frac{\ln a + \ln b}{2}\right\} = \exp\{\ln(ab)^{\frac{1}{2}}\} \\ &= \sqrt{ab}\end{aligned}$$

7. 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} (2^n + 3^n + 4^n)^{\frac{1}{n}}$ 。

《解》 因

$$(4^n)^{\frac{1}{n}} \leq (2^n + 3^n + 4^n)^{\frac{1}{n}} \leq (4^n + 4^n + 4^n)^{\frac{1}{n}}$$

即

$$4 \leq (2^n + 3^n + 4^n)^{\frac{1}{n}} \leq 3^{\frac{1}{n}} 4$$

因  $\lim_{n \rightarrow \infty} 4 = \lim_{n \rightarrow \infty} (3^{\frac{1}{n}} 4) = 4$ , 故由三明治定理可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (2^n + 3^n + 4^n)^{\frac{1}{n}} = 4 = \max\{2, 3, 4\}$$

## 精選習題

1. 求下面函數的極限值

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} \right\}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \right)$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow \infty} (\cosh^{-1} x - \ln x)$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{\tan^{-1} x} \right)$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x - 1} - \sqrt{x^2 - x})$$

$$(f) \lim_{t \rightarrow \infty} (t - te^{1/t})$$

$$(g) \lim_{x \rightarrow 0} (1 - 3x)^{\frac{1}{x}}$$

$$(h) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^{\frac{1}{x}}}{\left(1 - \frac{1}{x}\right)^x}$$

$$(i) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$$

$$(j) \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + \sin x)^{\cot x}$$

$$(k) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{3}{x} + \frac{5}{x^2} \right)^x$$

$$(l) \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{-\frac{1}{x}}$$

$$(m) \lim_{x \rightarrow 0} (e^{ax} + bx)^{\frac{c}{x}}$$

$$(n) \lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}}$$

2. Find the mean value of  $f(x) = \cos x$  on  $[-2, 2]$ .