喻超凡翻轉教室叢書

翻轉工程數學 上

喻超凡 喻超弘 喻婕 編著

喻超凡 Superyu

喻超凡翻轉教室叢書

翻轉工程數學 上

Advanced Engineering Mathematics

喻超凡、喻超弘、喻婕 編著

喻超凡 Superyu 喻超凡數位企業有限公司
http://www.superyu.idv.tw

喻超凡老師的家

超凡小鋪網址：http://www.pcstore.com.tw/superyu

工數神父喻超凡 Facebook 網址：
http://www.facebook.com/mathsuperyu

喻超凡雲端翻轉數學教室：http://www.superyu.idv.tw

序

數學是所有科學之母, 洩漏天機的語言, 所以不論是國內或是國外, 只要是研習工程科學的科系, 都將工程數學這一門學科, 列為必修的課程, 但是由於這一門課程的內容, 過度的艱澀枯燥難學，因此就成為很多剛學習這門課程同學的一大夢魘, 不知如何正確的去學習, 不久就淪為死背公式答案的機器了, 根本無法一窺工程數學這一門學問之精髓, 更遑論要分析或是解決工程上的問題。

有鑑於此，喻超凡博士參考國內外著名的工程數學叢書 (請參考參考文獻), 以及喻超凡博士在全國各大著名的補習班及國立大學任教工程數學三十多年的教學心得, 提綱挈領精編細撰, 將工程數學中重要的觀念、公式及口訣, 以結構化的方式放在每一章節的開始, 並且精選國內外, 各大著名的大學理工科系所研究所入學考的試題, 加入每一章節的精選範例中, 做整體詳細的思路與題型的分析和講解說明, 同時在每一章節最後的挑戰範例中, 加入觀念具有挑戰性或較為艱澀的題目, 以及工程數學中有關高等微積分、高等線性代數等純理論的定理証明, 精編細撰出這本"翻轉工程數學", 期能幫助同學在短時間內對工程數學能作全盤性的認識及了解, 一窺工程數學之美, 翻轉成績, 翻轉未來。

最後喻超凡博士將工程數學中重要理論的定義、定理、公式的來源, 及發展的過程和重要的數學家的生平事蹟... 等等的參考文獻, 以註腳的方式加於各章節中, 以增加閱讀本書的趣味性, 進而使讀者能在趣味中了解工程數學的發展過程及整體的全貌。同時喻超凡博士亦有架設網路學校, 將工程數學的基礎課程以開放課程的方式, 放在雲端翻轉教室中, 供同學參考及翻轉學習, 網路學校的網址 http://www.superyu.idv.tw。

本書雖經多次修定及校對, 但仍難免有所疏漏之處, 敬請各位讀者不吝賜教。本書已獲全國各大補習班及學校採用為教科書, 筆者在此致最大的謝意。

喻超凡

喻超凡雲端教室

2016. 1.

目錄

第 1 章 基礎數學

1.1 常用的定理

1. 三明治定理

(1) 若 $g(x) \le f(x) \le h(x), \forall\ 0 < |x-a| < \delta$, 且 $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = L$

則 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$。

(2) 若 $g(x) \le f(x) \le h(x), \forall\ x > k$ 且 $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to\infty} h(x) = L$

則 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$

2. L'Hôpital Rule*

(1) 設 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, 若 $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$, 則 $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \ell$。

(2) 設 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$、$\lim\limits_{x\to a} g(x) = \pm\infty$, 若 $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$, 則 $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \ell$。

3. Bolzano 定理 (勘根定理)†

設 $f(x)$ 在閉區間 $[a\,,\,b]$ 上爲連續, 若 $f(a)\cdot f(b) < 0$, 則 $\exists\, c \in (a\,,\,b)$, 使得 $f(c) = 0$

4. 積分均值定理

設 $f(x)$ 在 $[a\,,\,b]$ 上爲連續, $\exists\, c \in (a\,,\,b)$, 使得 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$。其中 $f(c)$ 稱爲 $f(x)$ 在 $[a\,,\,b]$ 中的平均值。

5. 微積分基本定理 (Fundamental Theorem of the Calculus)

設 f 在 $[a\,,\,b]$ 上爲連續

(1) 若 $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$, $\forall\, x \in [a\,,\,b]$, 則 $F'(x) = f(x), \forall\, x \in (a\,,\,b)$。

---

*Guillaume Francois Antoine Marquis de L'Hôpital(1661~1704) 法國數學家。此一法則是 Johann Bernoulli(July 1667~Jan 1748) 首先發現的, 當時 L'Hôpital 正花錢請 Bernoulli 教授他微積分, 因此 Bernoulli 就用 L'Hôpital 來命名。L'Hôpital 正確的發音爲 Low-pee-tall。

†Bernard Placidus Johann Nepomuk Bolzano(Oct 1781~Dec 1848) 捷克哲學家、數學家。

(2) 若 $G(x)$ 爲 $f(x)$ 之反導數, 則 $\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a) = G(x)\Big|_a^b$。

6. 克萊瑪定理 (Cramer's theorem)†

設聯立齊次方程爲

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\quad\vdots \quad\quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{1.1}$$

令

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},\ X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

(1) Cramer's rule‡ : 若 $B \neq 0$, 即 B 不爲 0 矩陣 , 且 $\det(A) \neq 0$, 令 A_j 爲矩陣 A 的第 j 行用 B 矩陣替換後的矩陣 , 則 (1.1) 式的解爲

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)},\ x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)},\ \cdots,\ x_n = \frac{\det(A_n)}{\det(A)}$$

(2) 若 $B = 0$, 即方程式爲

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \quad\quad\vdots \quad\quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases} \tag{1.2}$$

則 (1.2) 式稱爲 (1.1) 式的齊次聯立方程式。

(a) 若 $\det(A) \neq 0$, 若且唯若 (1.2) 式只有 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ 的解 (trivial solution)。

(b) 若 $\det(A) = 0$, 若且唯若 (1.2) 式存在一組 x_1、x_2、$\cdots$、x_n 不全爲零的解 (nontrivial solution)。

---

†Gabriel Cramer(July 1704~Jan 1752) 瑞士數學家。

‡該法則爲 Gabriel Cramer 於 1750 發表在 *Introduction to the analysis of algebraic curves* 上, 文獻上記載該法則於 1729 年先由英國數學家 Colin Maclaurin 所推導出來的, 並於 1748 年發表在 *Treatise of Algebra* 上。

精選範例

1. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x}$ 。

《解》☞ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x^2}}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\frac{1}{x^2}}{e^{\frac{1}{x^2}}(-\frac{2}{x^3})}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{2e^{\frac{1}{x^2}}}=0$

2. 求 $f(x)=\sin x$, 在 $[0\,,\,\frac{\pi}{2}]$ 的平均值 。

《解》☞ $f(x)$ 在 $[0\,,\,\frac{\pi}{2}]$ 中的平均值爲

$$f(c)=\frac{1}{\frac{\pi}{2}-0}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=\frac{2}{\pi}(-\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{\pi}$$

3. 設 $f(x)$ 爲 $[d\,,\,d+2\ell]$ 中的函數, 則 $f(x)$ 的 Fourier 級數爲

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{n\pi x}{\ell}+b_n\sin\frac{n\pi x}{\ell})$$

其中

$$a_0=\frac{1}{2\ell}\int_d^{d+2\ell}f(x)\,dx$$

請問 a_0 的數學意義爲何？

《解》 ☞ 由積分均值定理可知

$$a_0 = \frac{1}{2\ell}\int_d^{d+2\ell} f(x)\,dx = f(c)$$

爲 $f(x)$ 在 $[d\,,\,d+2\ell]$ 中的平均值。

4. 已知三角形其三個頂點爲 (x_1, y_1)，(x_2, y_2)，(x_3, y_3)，如果上述三角形之面積大於零，請證明通過此三角形三頂點之圓方程式可寫成下列形式：

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

《解》 ☞ 設三角形的外接圓的方程式爲 $a(x^2+y^2)+bx+cy+d=0$，因爲通過 $(x_1\,,\,y_1)$、$(x_2\,,\,y_2)$、$(x_3\,,\,y_3)$，故

$$\begin{cases} a(x^2+y^2)+bx+cy+d=0 \\ a(x_1^2+y_1^2)+bx_1+cy_1+d=0 \\ a(x_2^2+y_2^2)+bx_2+cy_2+d=0 \\ a(x_3^2+y_3^2)+bx_3+cy_3+d=0 \end{cases}$$

因 a、b、c、d 具有不全爲 0 的解，由 Cramer rule 可得三角形的外接圓的方程式爲

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

5. 設 $\lim_{x\to a} b(x) = 1$、$\lim_{x\to a} c(x) = \infty$，試證 $\lim_{x\to a}\{b(x)\}^{c(x)} = \exp\{\lim_{x\to a} c(x)[b(x)-1]\}$

《証》☞ 令 $b(x)=1+\dfrac{1}{v(x)}$，則 $v(x)=\dfrac{1}{b(x)-1}$，因 $\lim\limits_{x\to a}b(x)=1$，故

$$\lim_{x\to a}v(x)=\lim_{x\to a}\frac{1}{b(x)-1}=\pm\infty$$

因此

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a}\{b(x)\}^{c(x)} &= \lim_{x\to a}\{1+\frac{1}{v(x)}\}^{c(x)}\\
&= \lim_{x\to a}\{(1+\frac{1}{v(x)})^{v(x)}\}^{\frac{c(x)}{v(x)}}\\
&= \lim_{x\to a}\Big\{(1+\frac{1}{v(x)})^{v(x)}\Big\}^{\lim\limits_{x\to a}\frac{c(x)}{v(x)}}\\
&= \lim_{x\to a}\Big\{(1+\frac{1}{v(x)})^{v(x)}\Big\}^{\lim\limits_{x\to a}c(x)[b(x)-1]}\\
&= \exp\{\lim_{x\to a}c(x)[b(x)-1]\}
\end{aligned}$$

6. 求下列之極限值：

(a) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{a}{x})^{bx}$

(b) $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{\sin x}{x})^{\frac{1}{1-\cos x}}$

(c) $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{x+a}{x-a})^{x}$

(d) $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{a^x+b^x}{2})^{\frac{1}{x}}$

《解》☞

(a) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{a}{x})^{bx}=\exp\{\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{a}{x}-1)(bx)\}=\exp\{ab\}=e^{ab}$

(b)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}(\frac{\sin x}{x})^{\frac{1}{1-\cos x}} &= \exp\{\lim_{x\to 0}(\frac{\sin x}{x}-1)(\frac{1}{1-\cos x})\}\\
&= \exp\{\lim_{x\to 0}(\frac{\sin x-x}{x\cdot x^2})(\frac{x^2}{1-\cos x})\}\\
&= \exp\{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^3}\ \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos x}\}\\
&= \exp\{\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{3x^2}\ \lim_{x\to 0}\frac{2x}{\sin x}\}\\
&= \exp\{\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{6x}\ \lim_{x\to 0}\frac{2}{\cos x}\}\\
&= \exp\{-\frac{1}{6}\cdot 2\}=\exp\{-\frac{1}{3}\}=e^{-\frac{1}{3}}
\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x &= \exp\{\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}-1\right)x\}\\ &= \exp\{\lim_{x\to\infty}\frac{x+a-x+a}{x-a}\cdot x\}\\ &= \exp(2a)=e^{2a}\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} &= \exp\{\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x}{2}-1\right)\frac{1}{x}\}\\ &= \exp\{\lim_{x\to 0}\frac{a^x+b^x-2}{2x}\}\\ &= \exp\{\lim_{x\to 0}\frac{a^x\ln a+b^x\ln b}{2}\}\\ &= \exp\{\frac{\ln a+\ln b}{2}\}=\exp\{\ln(ab)^{\frac{1}{2}}\}\\ &= \sqrt{ab}\end{aligned}$$

7. 求 $\lim_{n\to\infty}(2^n+3^n+4^n)^{\frac{1}{n}}$ 。

《解》 ☞ 因

$$(4^n)^{\frac{1}{n}}\le(2^n+3^n+4^n)^{\frac{1}{n}}\le(4^n+4^n+4^n)^{\frac{1}{n}}$$

即

$$4\le(2^n+3^n+4^n)^{\frac{1}{n}}\le 3^{\frac{1}{n}}\ 4$$

因 $\lim_{n\to\infty}4=\lim_{n\to\infty}(3^{\frac{1}{n}}\ 4)=4$, 故由三明治定理可知

$$\lim_{n\to\infty}(2^n+3^n+4^n)^{\frac{1}{n}}=4=\max\{2,3,4\}$$

精選習題

1. 求下面函數的極限值

(a) $\lim_{x\to 0}\{\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\}$

(b) $\lim_{x\to 0}(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2})$

(c) $\lim_{x\to\infty}(\cosh^{-1}x-\ln x)$

(d) $\lim_{x\to 0}(\frac{1}{x}-\frac{1}{\tan^{-1}x})$

(e) $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x-1}-\sqrt{x^2-x})$

(f) $\lim_{t\to\infty}(t-te^{1/t})$

(g) $\lim_{x\to 0}(1-3x)^{\frac{1}{x}}$

(h) $\lim_{x\to\infty}\frac{2^{\frac{1}{x}}}{(1-\frac{1}{x})^x}$

(i) $\lim_{x\to 0}(\frac{\sin x}{x})^{\frac{1}{x^2}}$

(j) $\lim_{x\to 0^+}(1+\sin x)^{\cot x}$

(k) $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2})^x$

(l) $\lim_{x\to 0}(1+x)^{-\frac{1}{x}}$

(m) $\lim_{x\to 0}(e^{ax}+bx)^{\frac{c}{x}}$

(n) $\lim_{x\to 1}x^{\frac{1}{1-x}}$

2. Find the mean value of $f(x)=\cos x$ on $[-2, 2]$.