翻轉微積分

下冊

勘誤檔案

喻超凡喻超弘編

微積分fb社團

喻超凡翻轉教室

微積分 fb 社團

可得 $-2ax-1=0$, 故 $x=-\dfrac{1}{2a}$ ，且 $F''(-\dfrac{1}{2a})=\boxed{-4a^2}<0$, 故 $F(-\dfrac{1}{2a})$ 爲極大值,
由題意可知, $x=-\dfrac{1}{2a}=-2a$, 故 $4a^2=1$, 則 $a=\pm\dfrac{1}{2}$, 因 $a>0$, 故 $a=\dfrac{1}{2}$ 。

9. 求 $\displaystyle\lim_{a\to0}\int_a^{2a}\frac{e^{2x}}{x}\,dx$

《提示》 ➥ 積分均值定理僅適用於連續函數。

《解》 ☞ 因 e^{2x} 爲連續函數，故 $\exists c\in(a\,,\,2a)$，使得

$$\begin{aligned}\int_a^{2a}\frac{e^{2x}}{x}\,dx &= e^{2c}\int_a^{2a}\frac{1}{x}\,dx=e^{2c}\ \ln|x|\ \Big|_a^{2a}\\ &= e^{2c}\,(\ln|2a|-\ln|a|)=e^{2c}\ \ln|\frac{2a}{a}|\\ &= e^{2c}\ \ln 2\end{aligned}$$

因 $c\in(a\,,\,2a)$，故 $a<c<2a$，且 $\displaystyle\lim_{a\to0}a=\lim_{a\to0}2a=0$，由夾擠定理可知 $\displaystyle\lim_{a\to0}c=0$，則

$$\lim_{a\to0}\int_a^{2a}\frac{e^{2x}}{x}dx=\lim_{a\to0}e^{2c}\ \ln 2=\lim_{c\to0}e^{2c}\ \ln 2=\ln 2$$

10. 已知函數 f 在 $[-a\,,\,a]$ 中爲連續的函數，試證

(a) 若 f 爲偶函數，則 $\displaystyle\int_{-a}^{a}f(x)\ dx=2\int_0^a f(x)\ dx$

(b) 若 f 爲奇函數，則 $\displaystyle\int_{-a}^{a}f(x)\ dx=0$

《提示》 ➥ $f(-x)=f(x)\Longleftrightarrow f(x)$ 爲偶函數

$f(-x)=-f(x)\Longleftrightarrow f(x)$ 爲奇函數

《解》 ☞

(a) 因 $f(x)$ 爲偶函數，故 $f(-x)=f(x)$，則

$$\int_{-a}^{a}f(x)\ dx = \int_0^a f(x)\ dx+\int_{-a}^{0}f(x)\ dx$$

習題解答

1. $\dfrac{1}{3}$

2. $k = 3$、$a = \dfrac{1}{6}$

3. $\sin 3$

4. $\dfrac{1}{2}$

5. $f'(1) = \dfrac{\pi}{4}$、$f''(1) = \dfrac{\pi}{2} + 1$

6. $\dfrac{20}{3}$

7. $(0\,,\,-3\sin 1)$

8. $2x\ \sin|x|$

9. $\dfrac{3\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}$

10. $\boxed{\pm\dfrac{1}{4}}$

11. 0

12. $\dfrac{4}{105}(11\sqrt{2} - 4)$

13. $\dfrac{e}{2}(\cos 1 + \sin 1) - \dfrac{1}{2}$

14. $\dfrac{2}{17}$

15. $3\ln 3$

16. 4

17. 81

18. $2e\ln 2 - 2$

19. $\dfrac{64}{3}$

20. $\dfrac{\pi}{2} + 2$

21. $\dfrac{\pi}{4}$

22. $\dfrac{\pi}{32}\ln 3 + \dfrac{\pi}{16}\tan^{-1}\dfrac{1}{2}$

23. $G'(x) = x\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$

    $G''(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt + x\cdot f(x)$

24. $a = -4$、$b = 4$

精選範例

1. 試就 p 值探討下列瑕積分之斂散性

(1) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx$ (2) $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{1}{x(\ln x)^p} dx$

《解》 ☞ (1) (a) 當 $p \neq 1$ 時

$$\begin{aligned}\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\, dx &= \lim_{b\to\infty} \int_1^b x^{-p}\, dx = \lim_{b\to\infty} \frac{x^{1-p}}{1-p}\Big|_1^b \quad ; \quad (p \neq 1)\\ &= \lim_{b\to\infty} \{\frac{b^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p}\}\\ &= \begin{cases} \infty & ; 1-p > 0\ (\text{ 即 } p < 1\ )\text{，發散} \\ -\dfrac{1}{1-p} & ; 1-p < 0\ (\text{ 即 } p > 1\ )\text{，收斂} \end{cases}\end{aligned}$$

(b) 當 $p = 1$ 時

$$\begin{aligned}\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\, dx &= \int_1^{\infty} \frac{1}{x}\, dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{x}\, dx = \lim_{b\to\infty} \ln|x|\ \Big|_1^b\\ &= \lim_{b\to\infty} \{\ln|b| - \ln 1\} = \infty\end{aligned}$$

故 $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\, dx$ 發散。

(c) 由 (a)、(b) 可知

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\, dx = \begin{cases} p \leq 1 & ;\text{發散} \\ p > 1 & ;\text{收斂} \end{cases}$$

(2) (a) 當 $p \neq 1$ 時

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x(\ln x)^p}\, dx = \lim_{b\to\infty} \int_2^b (\ln x)^{-p}\ d(\ln x) = \lim_{b\to\infty} \frac{(\ln x)^{1-p}}{1-p}\ \Big|_2^b$$

故 $\int_a^b \frac{1}{b-x}\,dx$ 發散。

(c) 由 (a)、(b) 可知

$$\int_a^b \frac{1}{(b-x)^p}dx = \begin{cases} \boxed{p<1} \text{；收斂} \\ \boxed{p \ge 1} \text{；發散} \end{cases}$$

4. 求下列積分

(a) $\int_0^1 \ln x\,dx$ 《北大資訊》 (b) $\int_0^3 \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}\,dx$

(c) $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2}\,dx$ (d) $\int_{-1}^1 \frac{1}{x}\,dx$

《解》 ☞

(a)

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \ln x\,dx &= \lim_{a\to 0^+}\int_a^1 \ln x\,dx = \lim_{a\to 0^+}\left\{x\ln x\,\Big|_a^1 - \int_a^1 x\,d(\ln x)\right\} \\
&= \lim_{a\to 0^+}\{-a\ln a - x\,\Big|_a^1\} = \lim_{a\to 0^+}\{-a\ln a - 1 + a\} \\
&= \lim_{a\to 0^+}\frac{-\ln a}{\frac{1}{a}} - 1 = \lim_{a\to 0^+}\frac{-\frac{1}{a}}{-\frac{1}{a^2}} - 1 \\
&= \lim_{a\to 0^+} a - 1 = -1
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\int_0^3 \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}\,dx &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}\,dx + \int_1^3 \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}\,dx \\
&= \lim_{v\to 1^-}\int_0^v (x-1)^{-\frac{2}{3}}\,dx + \lim_{u\to 1^+}\int_u^3 (x-1)^{-\frac{2}{3}}\,dx \\
&= \lim_{v\to 1^-} 3(x-1)^{\frac{1}{3}}\,\Big|_0^v + \lim_{u\to 1^+} 3(x-1)^{\frac{1}{3}}\,\Big|_u^3 \\
&= \lim_{v\to 1^-} 3\{(v-1)^{\frac{1}{3}} - (0-1)^{\frac{1}{3}}\} \\
&\quad + \lim_{u\to 1^+} 3\{(3-1)^{\frac{1}{3}} - (u-1)^{\frac{1}{3}}\} \\
&= 3(0+1) + 3(\sqrt[3]{2} - 0) = 3 + 3\sqrt[3]{2}
\end{aligned}$$

故

$$\int_0^1 x^n \ln^2 x \, dx = \frac{2}{(n+1)^3} - \infty + (-\infty) = -\infty$$

(3) 由 (1)、(2) 知 $\int_0^1 x^n \ln^2 x \, dx$ 僅於 $n > -1$ 時爲收斂。

4. 已知 $A \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+t^2} \, dt = \frac{1}{n}$，試求 $A = ?$

《解》 ☞

$$\begin{aligned} A \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+t^2} \, dt &= A \cdot \lim_{\substack{b \to \infty \\ a \to -\infty}} \int_a^b \frac{1}{1+t^2} \, dt = A \lim_{\substack{b \to \infty \\ a \to -\infty}} \tan^{-1} t \Big|_a^b \\ &= A \lim_{\substack{b \to \infty \\ a \to -\infty}} (\tan^{-1} \boxed{b - \tan^{-1} a}) \\ &= A\{\frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2})\} = \pi \cdot A = \frac{1}{n} \end{aligned}$$

故 $A = \frac{1}{n\pi}$

5. 已知 $\int_0^{\infty} e^{-t^2} \, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$，求 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \, dx$

其中 μ、σ 均爲常數，且 $\sigma > 0$。

《解》 ☞ 令 $x - \mu = s$，故 $dx = ds$，則

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \, dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{s^2}{2\sigma^2}} \, ds \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(\frac{s}{\sqrt{2}\sigma})^2} \, ds \\ &\quad (\text{令 } t = \frac{s}{\sqrt{2}\sigma}\text{，故 } ds = \sqrt{2}\sigma \, dt) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-t^2} \cdot \sqrt{2}\sigma \, dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} \, dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-t^2} \, dt \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = 1 \end{aligned}$$

故弧長爲

$$S=\int_1^2(\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{x^2})\ dx=(\frac{1}{12}x^3-\frac{1}{x})\Big|_1^2=\frac{13}{12}$$

(b) 因 $y'(x)=\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_0^x\sqrt{\sin t}\ dt=\sqrt{\sin x}$，故弧長爲

$$\begin{aligned}S&=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sqrt{1+(y')^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sqrt{1+\sin x}\,dx\\&=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sqrt{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}\ dx\\&=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sqrt{(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2})^2}\ dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2})\ dx\\&=(-2\cos\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2})\ \Big|_0^{\frac{\pi}{3}}=3-\sqrt{3}\end{aligned}$$

14. 求下列平面曲線於已知區間之弧長

(a) $y=\dfrac{1}{2}\{x\sqrt{x^2-1}-\ln(x+\sqrt{x^2-1})\}$，$\boxed{x\in[1\,,\,3]\text{ 。}}$

(b) $y=\dfrac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}})$，介於 $x=0$ 與 $x=b$ 之間。

(c) $x=\displaystyle\int_0^y\sqrt{\sec^4 t-1}\,dt,\ -\frac{\pi}{4}\le y\le\frac{\pi}{4}.$ 《高師物理》

《解》 ☞ (a) 因

$$y'=\frac{1}{2}\Big\{\sqrt{x^2-1}+\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}-\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\Big\}=\sqrt{x^2-1}$$

故

$$\boxed{S=\int_1^3\sqrt{1+(y')^2}\ dx=\int_1^3\sqrt{1+(x^2-1)}\ dx=\int_1^3 x\ dx=\frac{x^2}{2}\ \Big|_1^3=4}$$

(b) 因 $y'=\dfrac{1}{2}(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}})$，故

$$\sqrt{1+(y')^2}=\sqrt{1+\frac{1}{4}(e^{\frac{2x}{a}}-2+e^{-\frac{2x}{a}})}=\frac{1}{2}(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}})$$

故

$$S=\int_0^b\sqrt{1+(y')^2}\ dx=\int_0^b\frac{1}{2}(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}})\ dx=\frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}})\ \Big|_0^b=\frac{a}{2}(e^{\frac{b}{a}}-e^{-\frac{b}{a}})$$

《解》 ☞ 因 $ds=\sqrt{(\frac{dx}{dt})^2+(\frac{dy}{dt})^2}\ dt=\sqrt{(3t^2)^2+(3t)^2}\ dt=3t\sqrt{t^2+1}\ dt$，故

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 3t\sqrt{t^2+1}\ dt=\int_0^1 3\sqrt{t^2+1}\,\frac{1}{2}d(t^2+1) \\ &= 3\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(t^2+1)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1=2\sqrt{2}-1 \end{aligned}$$

17. 求下列曲線之弧長

(a) $r=\sqrt{1+\sin 2\theta}$，$0\le\theta\le\pi\sqrt{2}.$ (b) $r=a\,(1+\cos\theta)$，$(a>0)$ 《成大A》

(c) $r=e^{\theta}$，$(0\le\theta\le\pi)$ 《台綜大C》 (d) $r=a\sin^3\dfrac{\theta}{3}$，$(a>0\ ;\ 0\le\theta\le 3\pi)$

《解》 ☞ (a) 因 $r=\sqrt{1+\sin 2\theta}$，故 $\dfrac{dr}{d\theta}=\dfrac{\cos 2\theta}{\sqrt{1+\sin 2\theta}}$，則

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\pi\sqrt{2}}\sqrt{r^2+(\frac{dr}{d\theta})^2}\,d\theta=\int_0^{\pi\sqrt{2}}\sqrt{(\sqrt{1+\sin 2\theta})^2+(\frac{\cos 2\theta}{\sqrt{1+\sin 2\theta}})^2}\ d\theta \\ &= \int_0^{\pi\sqrt{2}}\sqrt{\frac{(1+\sin 2\theta)^2+\cos^2 2\theta}{1+\sin 2\theta}}\ d\theta \\ &= \int_0^{\pi\sqrt{2}}\sqrt{\frac{1+2\sin 2\theta+\sin^2 2\theta+\cos^2 2\theta}{1+\sin 2\theta}}\ d\theta \\ &= \int_0^{\pi\sqrt{2}}\sqrt{2}\ d\theta=2\pi \end{aligned}$$

(b) 因 $r=a(1+\cos\theta)$，故 $\dfrac{dr}{d\theta}=-a\sin\theta$，則

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{2\pi}\sqrt{r^2+(\frac{dr}{d\theta})^2}\ d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\sqrt{a^2(1+\cos\theta)^2+a^2\sin^2\theta}\ d\theta \\ &= a\int_0^{2\pi}\sqrt{2(1+\cos\theta)}\ d\theta=a\int_0^{2\pi}2\Big|\cos\frac{\theta}{2}\Big|\ d\theta \\ &= \boxed{4a\cdot}\int_0^{\pi}\cos\frac{\theta}{2}\ d\theta=4a\cdot 2\sin\frac{\theta}{2}\ \Big|_0^{\pi} \\ &= 8a \end{aligned}$$

精選習題

1. 一橢圓 $(\frac{x}{a})^2+(\frac{y}{b})^2=1$，$a>b>0$，求其繞 x 軸旋轉的體積。

2. Find the volume of the solid generated by revolving the region between the y-axis and the curve $x=\dfrac{2}{y}$, $1\le y\le 4$, about the y-axis. 《高大電機》

3. Find the volume of the solid generated by revolving the region bounded by the graphs of the equations about the x-axis. $y=e^{-x}$，$y=0$，$x=0$，$x=1$ 《高大物理》

4. 試求 $y=|x|+1$ 與 $y=2x^2$ 兩函數對 x 軸旋轉的體積。

5. 試求 $y=x^2$ 及 $y=x$ 所圍的區域，繞 $x=1$ 的旋轉體積。

6. 求區域 $x^2+(y-R)^2\le r^2$，$0<r<R$，繞 x 軸的表面積及體積。 《台大》

7. 將圓 $(x-c)^2+y^2=r^2$ 的內部區域繞 y 軸旋轉，求所形成環體的體積。

8. 求函數 $f(x)=\sqrt{r^2-x^2}$ 之圖形, 與 x 軸在區間 $[\frac{r}{2},r]$ 所圍區域，繞 x 軸旋轉的體積。

9. 求 $y=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$、$y=0$、$x=0$、$x=1$ 所圍成的區域，繞 x 軸旋轉所形成的體積。

10. 求區域 $f(x)=\cos x$，$0\le x<\dfrac{\pi}{2}$，繞 x 軸旋轉的體積。

11. 求區域 $y=\ln x$、$y=0$、$x=3$ 繞 y 軸旋轉的體積。

12. 求由頂點 $(1,1)$、$(4,1)$、$(3,2)$ 三點所構成三角形區域，繞 x 軸旋轉所得的體積。《台大》

13. Let R be the region below the curve $y=\sin^2 x$ when $0\le x\le\pi$ and V be the volume of the solid obtained by rotating R about the y-axis. Then $V=$ ________. 《台大B》

14. Find the volume of the solid obtained by revolving the region bounded by the curves $y=-x^2+4x$ and $y=x^2$ about the x-axis. 《台聯A2》

15. $\{(x,y)\,|\,y=\sin x,0\le x\le\pi\}$ 是一曲線段，此線段繞 x 軸旋轉，所形成之體積爲何？

16. R 是由 $y=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$、$y=0$、$x=0$、$x=1$ 所圍成的區域，求 R 繞 x 軸旋轉所形成的體積。

17. 求函數 $f(x)=e^{-x^2}$ 之圖形與 x 軸所圍區域，繞 y 軸旋轉所得立體 S 之體積。 《成大》

習題解答

1. $\dfrac{4\pi}{3}ab^2$
2. 3π
3. $\dfrac{\pi}{2}(1-e^{-2})$
4. $\dfrac{46}{15}\pi$
5. $\dfrac{\pi}{6}$
6. 表面積爲 $4\pi^2 Rr$，體積爲 $2R\pi^2 r^2$
7. $2c\,\pi^2 r^2$
8. $\dfrac{5}{24}\pi r^3$
9. $\dfrac{\pi^2}{4}$
10. $\dfrac{\pi^2}{4}$
11. $\pi(9\ln 3-4)$
12. 4π
13. $\dfrac{\pi^3}{2}$
14. $\dfrac{32\pi}{3}$
15. $\dfrac{\pi^2}{2}$
16. $\dfrac{\pi^2}{4}$
17. π

(2) 條件收斂 (Conditional Convergence)：

若級數 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 發散，但 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 爲收斂，則級數 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 稱爲條件收斂。

5. 交錯級數之審斂法 (Leibniz's Alternating Series Test)：

設交錯級數爲 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$，($\forall a_n>0$)，若其滿足

(1) $\lim_{n\to\infty}a_n=0$

(2) $a_n>a_{n+1}$ (即 $<a_n>$ 爲嚴格減數列)

則級數 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 爲收斂級數。

6. Abel's 審斂法 (Abel's test)*：若級數 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 滿足

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 爲收斂級數。

(2) $<b_n>$ 爲單調 (monotone) 且有界的數列 (sequence)。

則級數 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 亦爲收斂級數。

7. 級數的運算 (Computation with Series)

(1) 括號 (mixed terms) 及重組 (rearrangements) 運算：設級數爲

$$\sum a_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots$$

且

$$\sum b_n=(a_1+a_2)+(a_3+a_4+a_5)+(a_6+a_7)+\cdots$$

$$\sum c_n=a_1+a_3+a_2+a_6+a_4+\cdots$$

則 $\sum b_n$ 稱爲 $\sum a_n$ 的加括號級數，$\sum c_n$ 稱爲 $\sum a_n$ 的重組級數。

(a) 所有收斂的級數，加括號後其仍爲收斂，且收斂到與原級數相同的值。

(b) 發散的正項級數，加括號後其仍爲發散，但發散的非正項級數，加括號後不一定爲發散。

*Abel's 審斂法 (Abel's test)，以挪威的數學家 Niels Henrik Abel(Aug 1802∼April 1829) 來命名的。Abel's 審斂法的例子讀者可參考 212 頁的例子。

(c) 所有絕對收斂的級數，重組後其仍爲絕對收斂，且收斂到與原級數相同的值。

(d) 條件收斂的級數，重組後不一定收斂 (稱爲Riemann rearrangement theorem)

(2) 基本運算：

(a) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$，且 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$，則 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \boxed{\pm} \sum_{n=1}^{\infty} b_n = A \pm B$。

(b) 設有兩級數爲 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$、$\sum_{n=0}^{\infty} b_n$，則 Cauchy Product 定義成

$$\begin{aligned}(\sum_{n=0}^{\infty} a_n)\cdot(\sum_{n=0}^{\infty} b_n) &= a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0) + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0) + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n \text{；其中 } c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\end{aligned}$$

若級數 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A$、$\sum_{n=0}^{\infty} b_n = B$ 且其中至少有一個爲絕對收斂時，則 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ 亦收斂，且 $(\sum_{n=0}^{\infty} a_n)\cdot(\sum_{n=0}^{\infty} b_n) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n = A \cdot B$

《解》 ☞ 因 $x_1=\sqrt{3}<x_2=\sqrt{3}^{\sqrt{3}}$、$x_2=\sqrt{3}^{\sqrt{3}}<x_3=\sqrt{3}^{\sqrt{3}^{\sqrt{3}}}$、$\cdots$，故 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\infty$

3. Let $a_1=1$, and $a_{n+1}=3-\dfrac{1}{a_n}$ for $n\geq 1$. Determine whether the sequence $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ is convergent or divergent. 《政大數學1》

《解》 ☞ 令 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}=\alpha$，由

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\{3-\frac{1}{a_n}\}$$

可得

$$\alpha=3-\frac{1}{\alpha}\ \Rightarrow\ \alpha^2-3\alpha+1=0$$

故 $\alpha=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$，因 $a_1=1$、$a_2=3-1=2$，$a_3=3-\dfrac{1}{2}=2.5$，

故 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ 不合，則 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$，因此數列收斂。

4. Find the range of x such that the sequence $\left\{(\dfrac{2x}{x+2})^n\right\}_{n=1}^{\infty}$ converges. 《中正財金》

《解》 ☞ 因 $\left\{(\dfrac{2x}{x+2})^n\right\}_{n=1}^{\infty}$ 收斂，故 $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{2x}{x+2})^n\in\mathbb{R}$，可得

(1) $\dfrac{2x}{x+2}\leq 1$，則 $2x\leq x+2$，故 $x\leq 2$

(2) $\dfrac{2x}{x+2}>-1$，則 $2x>-(x+2)$，故 $x>-\dfrac{2}{3}$

(3) 由 (1)、(2) 可知 $-\dfrac{2}{3}<x\leq 2$ 時數列收斂。

5. 試証明 $\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\dfrac{1}{5\cdot 7}+\cdots=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ 爲收斂級數，並求其級數和

故由 Limit Comparison Test 可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3n+1}{n \cdot 2^n}$ 亦為收斂級數。

(4) 當 $n \to \infty$ 時 $\dfrac{1}{3^n + n} \to \dfrac{1}{3^n}$，故令 $b_n = \dfrac{1}{3^n}$，因 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{3^n}$ 為收斂級數，且

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{3^n + n}}{\frac{1}{3^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{3^n + n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n \ln 3}{3^n \ln 3 + 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n (\ln 3)^2}{3^n (\ln 3)^2} = 1$$

故由 Limit Comparison Test 可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{3^n + n}$ 亦為收斂級數。

18. Find all values of a so that the series $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin(\dfrac{1}{n^{3a-1} + 3})$ is divergent. 《台綜大A》

《解》 ☞ (1) $a \boxed{\leq \frac{1}{3} \text{ 時}}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \sin(\dfrac{1}{n^{3a-1} + 3}) = \sin \dfrac{1}{3} \neq 0$，級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin(\dfrac{1}{n^{3a-1} + 3})$ 發散。

(2) $\boxed{a > \frac{1}{3}}$ 時，當 $n \to \infty$ 時

$$\sin(\frac{1}{n^{3a-1} + 3}) \to \frac{1}{n^{3a-1} + 3} \to \frac{1}{n^{3a-1}}$$

因 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{3a-1}}$ 在 $3a - 1 \leq 1$ 時發散，即 $a \leq \dfrac{2}{3}$ 時，級數發散，故由 Limit Comparison Test 可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin(\dfrac{1}{n^{3a-1} + 3})$ 為發散級數。

(3) 結論：$a \leq \dfrac{2}{3}$ 時 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin(\dfrac{1}{n^{3a-1} + 3})$ 發散。

19. Determine whether the series $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin(\dfrac{1}{\sqrt{n}}) \ln(1 + \dfrac{1}{\sqrt{n}})$ is divergent, conditionally convergent, or absolutely convergent. 《政大數學2》

《解》 ☞ 因 $n \to \infty$ 時

$$\sin(\frac{1}{\sqrt{n}}) \ln(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}) = (\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{3!}(\frac{1}{\sqrt{n}})^3 + \cdots)(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2}(\frac{1}{\sqrt{n}})^2 + \cdots) = \frac{1}{n} + \cdots$$

收斂，則 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{n}$ 爲絕對收斂。

9. 發散的級數加括號後(mixed terms) 不一定爲發散級數，請舉例說明。

《提示》 ➥ 發散的正項級數，加括號後其仍爲發$\boxed{\text{散}}$，但發散的非正項級數，加括號後不一定爲發$\boxed{\text{散}}$。

《解》 ☞ 令級數爲 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot 1 = 1-1+1-1+1-1+\cdots$

因 $\lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1 \neq 0$，故級數爲發散，但 $(1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} 0 = 0$ 爲收斂，即級數加括號後級數爲收斂。

10. 証明比值審斂法（D'Alembert's Ratio Test）。

《解》 ☞ (1) $\ell < 1$，令 $\ell < r < 1$, 因 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \ell$，且 $\ell < r$，

故 $\exists N > 0$，使得 $n \geq N$，則 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} < r$，故 $a_{n+1} < a_n r$，$n \geq N$，即

$$a_{N+1} < a_N \cdot r \ \Rightarrow\ a_{N+2} < a_{N+1}\cdot r < a_N \cdot r^2 \ \Rightarrow\ a_{N+3} < a_{N+2}\cdot r < a_N \cdot r^3$$

故 $a_{N+k} < a_N \cdot r^k$，$\forall k \geq 1$，因

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_N \cdot r^k = a_N \cdot r + a_N \cdot r^2 + a_N \cdot r^3 + \cdots$$

當 $r < 1$ 時, 級數爲收斂, 因 $a_{N+k} < a_N \cdot r^k$，故由比較審斂法可知

$\sum\limits_{n=N+1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{N+k}$ 爲收斂級數, 即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 亦爲收斂。

(2) $\ell > 1$，因 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \ell > 1$，故 $\exists N > 0$，使得 $n \geq N$，則 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1$，即 $a_{n+1} > a_n$，故

$$0 < a_n < a_{n+1} < a_{n+2} < \cdots\ ;\ \forall n \geq N$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$，因此由 n 項審斂法可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 爲發散。

挑戰範例

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\sin^{-1}x}{\tan x-\tan^{-1}x}$ 《台大C》

《解》 ☞ 因

$$\sin x-\sin^{-1}x=(x-\frac{x^3}{3!}+\cdots)-(x+\frac{x^3}{6}+\frac{3x^5}{40}+\cdots)=-\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{15}+\cdots$$

$$\tan x-\tan^{-1}x=(x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\cdots)-(x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots)=\frac{2x^3}{3}-\frac{x^5}{15}+\cdots$$

故

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\sin^{-1}x}{\tan x-\tan^{-1}x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^5}{15}+\cdots}{\dfrac{2x^3}{3}-\dfrac{x^5}{15}+\cdots}=-\frac{1}{2}$$

2. Find a, $b>0$ such that $\displaystyle\lim_{t\to 0^+}\frac{(1-\cos(2t))^3\tan^2(3t)\csc(2t)}{t^a}=b.$ 《政大數學1》

《解》 ☞

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{(1-\cos(2t))^3\tan^2(3t)\csc(2t)}{t^a}=\lim_{t\to 0^+}\frac{(1-\cos(2t))^3\tan^2(3t)}{t^a\cdot\sin(2t)}$$

$$=\lim_{t\to 0^+}\frac{\{1-(1-\frac{1}{2}(2t)^2+\cdots)\}^3\{3t+\frac{1}{3}(3t)^3+\cdots\}^2}{t^a\cdot\{(2t)-\frac{1}{6}(2t)^3+\cdots\}}$$

$$=\lim_{t\to 0^+}\frac{\{2t^2+\cdots\}^3\{3t+\frac{1}{3}(3t)^2+\cdots\}^2}{t^a\cdot\{(2t)-\frac{1}{6}(2t)^3+\cdots\}}=b$$

故 $a=7$，且 $b=\dfrac{2^3\cdot 3^2}{2}=36$。

(b) 由 $\ln(1+x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k x^{k+1}}{(k+1)}$，故

$$x\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{k+2}}{(k+1)} \tag{1}$$

對 (1) 式兩端取 $0 \sim x$ 的積分

$$\begin{aligned}
\int_0^x t\ln(1+t)\ dt &= \int_0^x \Big[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{k+2}}{(k+1)}\Big]\ dt = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^x \frac{(-1)^k t^{k+2}}{(k+1)}\ dt \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{k+3}}{(k+3)(k+1)} = x^3 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{(k+3)(k+1)} \qquad (2)
\end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned}
\int_0^x t\ln(1+t)\ dt &= \frac{t^2}{2}\ln(1+t)\ \Big|_0^x - \frac{1}{2}\int_0^x \frac{t^2}{1+t}\ dt \\
&= \boxed{\frac{x^2}{2}}\ln(1+x) - \frac{1}{2}\int_0^x \{(t-1) + \frac{1}{t+1}\}\ dt \\
&= \frac{x^2}{2}\ln(1+x) - \frac{1}{2}(\frac{1}{2}x^2 - x + \ln|x+1|) \qquad (3)
\end{aligned}$$

由 (2)、(3) 兩式可得

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{(k+3)(k+1)} &= \frac{1}{x^3}\int_0^x t\ln(1+t)dt \\
&= \frac{1}{2x}\ln(1+x) - \frac{1}{2x^3}(\frac{1}{2}x^2 - x + \ln|x+1|)
\end{aligned}$$

6. (1) 求冪級數 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{x^{k+1}}{k(k+1)}$ 的和函數。 《交大、中山》

(2) 求冪級數 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$ 的和函數。

《解》 ☞ (1)

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{k\cdot(k+1)} &= \sum_{k=1}^{\infty} (\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1})x^{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{k} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{k+1} \\
&= x\sum_{k=1}^{\infty} \int_0^x t^{k-1}\ dt - \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^x t^k\ dt \\
&= x\int_0^x (\sum_{k=1}^{\infty} t^{k-1})\ dt - \int_0^x (\sum_{k=1}^{\infty} t^k)\ dt
\end{aligned}$$

《解》 ☞ 因 $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^3}} = (1+x^3)^{-\frac{1}{2}} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} C_k^{-\frac{1}{2}} x^{3k}$，故

$$\int_0^{0.1} \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}\,dx = \int_0^{0.1} \Big(\sum_{k=0}^{\infty} C_k^{-\frac{1}{2}} x^{3k}\Big)\,dx = \sum_{k=0}^{\infty} C_k^{-\frac{1}{2}} \frac{x^{3k+1}}{3k+1}\Big|_0^{0.1}$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_k^{-\frac{1}{2}}}{3k+1}\Big(\frac{1}{10}\Big)^{3k+1}$$

因誤差 $\left|\dfrac{C_k^{-\frac{1}{2}}}{3k+1}\Big(\dfrac{1}{10}\Big)^{3k+1}\right| < 10^{-8}$，故 $\boxed{k \geq 2}$，則

$$\int_0^{0.1} \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}} \approx \frac{1}{10} + \frac{1}{4}C_1^{-\frac{1}{2}} \cdot 10^{-4} + \boxed{\frac{1}{7}C_2^{-\frac{1}{2}} \cdot 10^{-7}}$$

14. 請估算 $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{1}{1+x^3}\,dx$ 到小數點後第3位。

《解》 ☞ 因 $\dfrac{1}{1+x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$，則 $\dfrac{1}{1+x^3} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{3n}$，故

$$\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{1}{1+x^3}\,dx = \int_0^{\frac{1}{3}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{3n}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{3n+1}}{3n+1}\Big|_0^{\frac{1}{3}}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(3n+1)}\Big(\frac{1}{3}\Big)^{3n+1}$$

令

$$P_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\Big(\frac{1}{3}\Big)^4 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(3n+1)}\Big(\frac{1}{3}\Big)^{3n+1}$$

且

$$E_n = (-1)^{n+1}\frac{1}{3n+4} \cdot \Big(\frac{1}{3}\Big)^{3n+4} + (-1)^{n+2}\frac{1}{3n+7}\Big(\frac{1}{3}\Big)^{3n+7} + \cdots$$

故

$$|E_n| < \frac{1}{3n+4}\Big(\frac{1}{3}\Big)^{3n+4} < \frac{1}{2} \times 10^{-3} = 0.0005$$

可解得 $n \geq 1$，即

$$\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{1}{1+x^3}\,dx \approx P_1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\Big(\frac{1}{3}\Big)^4$$

6.4 空間曲面與空間曲線

6.4.1 空間曲面的表示方法

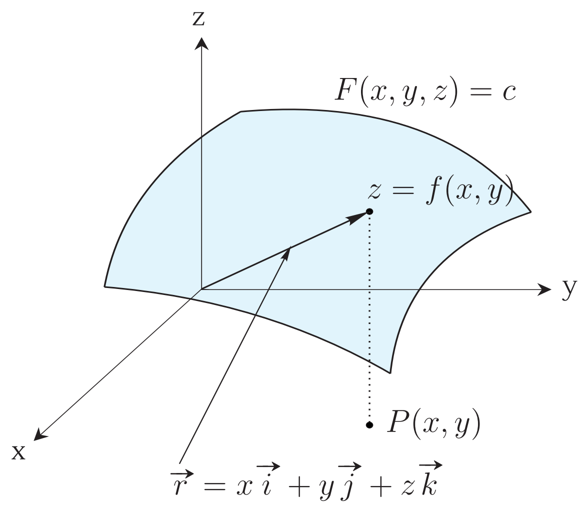


Figure 6.8: 空間曲面

1. 隱函數（等位面）表示法（如圖 6.8）：$F(x, y, z) = c$

例如：(1) $ax + by + cz + d = 0$，爲斜平面。

(2) $(x-a)^2 + (y-b)^2 = \rho^2$，爲柱心爲 $(a\,,\,b\,,\,z)$ 半徑爲 ρ 的柱面。

(3) $x^2 + y^2 - z^2 = 0$，爲繞 z 軸的錐面。

(4) $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = \rho^2$，爲球心 $(a\,,\,b\,,\,c)$ 半徑爲 ρ 的球面。

2. 顯函數（高度函數）表示法（如圖 6.8）：

$$z = f(x\,,\,y) \quad \text{或} \quad y = g(x\,,\,z) \quad \text{或} \quad x = h(y\,,\,z)$$

例如：$z = x^2 + y^2$，爲繞 z 軸的錐面。

3. 位置向量（參數方程式）表示法 (如圖 6.8)：設參數方程式爲

$$\begin{cases} x = x(u\,,\,v) \\ y = y(u\,,\,v) \\ z = z(u\,,\,v) \end{cases}$$

則曲面的位置向量爲

$$\vec{r}(u\,,\,v) = x(u\,,\,v)\vec{i} + y(u\,,\,v)\vec{j} + z(u\,,\,v)\vec{k}$$

例如：$\vec{r}(\phi\,,\,\theta) = a\sin\phi\cos\theta\,\boxed{\vec{i}\,+}\,a\sin\phi\sin\theta\,\boxed{\vec{j}\,+}\,a\cos\phi\,\boxed{\vec{k}}$

$0 \le \phi \le \pi$，$0 \le \theta < 2\pi$，$a > 0$，爲半徑爲 a 的球面。

皆不存在。

(b) $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta \le \frac{\epsilon}{2}$, $\ni$ $0 < |(x\,,\,y) - (0\,,\,0)| = \sqrt{x^2+y^2} < \delta$，則

$$\begin{aligned}|f(x\,,\,y) - 0| &= \left|x\sin y - y\sin\frac{1}{x} - 0\right| \\ &\le \left|x\sin\frac{1}{y}\right| + \left|y\sin\frac{1}{x}\right| \\ &\le |x| + |y| < 2\delta \le \epsilon\end{aligned}$$

故 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x\,,\,y) = 0$。

---

3. (a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3+y}{x+y}$　(b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3+y}{y}$

(c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^4+y^3}{4x^2+y^2}$　(d) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,-1)} \dfrac{x^2y+1}{x^2-y^2}$

《解》 ☞

(a) 取路徑 $y = mx$，代回極限中可得

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ \text{沿 } y=mx}} \frac{x^3+y}{x+y} = \lim_{x\to 0}\frac{x^3+mx}{x+mx} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2+m}{1+m} = \frac{m}{1+m}$$

極限與 m 有關，故 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3+y}{x+y}$ 不存在。

(b) 取路徑 $y = mx^3$，代回極限中可得

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ \text{沿 } y=mx^3}} \frac{x^3+y}{y} = \lim_{x\to 0}\boxed{\frac{x^3+mx^3}{mx^3} = \lim_{x\to 0}\frac{1+m}{m} = \frac{1+m}{m}}$$

極限與 m 有關，故 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3+y}{y}$ 不存在。

(c) 令 $x = \frac{1}{2} r\,\cos\theta$、$y = r\,\sin\theta$，當 $(x\,,\,y) \to (0\,,\,0)$ 時，則 $r \to 0$、$\theta \in \mathbb{R}$，故

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+y^3}{4x^2+y^2} &= \lim_{\substack{r\to 0\\ \theta\in\mathbb{R}}} \frac{(\frac{1}{2}r\,\cos\theta)^4 + (r\,\sin\theta)^3}{4\,(\frac{1}{2}r\,\cos\theta)^2 + (r\,\sin\theta)^2} \\ &= \lim_{\substack{r\to 0\\ \theta\in\mathbb{R}}} \frac{\frac{1}{16}r^4\cos^4\theta + r^3\sin^3\theta}{r^2} = 0\end{aligned}$$

比較可得

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = -y^3 \sin x + y^2 + 4 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 \cos x + 2xy \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} = -6 \end{cases}$$

故

$$f(x\,,\,y\,,\,z) = \int^x (-y^3 \sin x + y^2 + 4)\,dx = y^3 \cos x + xy^2 + 4x + g(y\,,\,z) \tag{1}$$

對 (1) 式兩端取 y 的偏微分可得

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 \cos x + 2xy + \frac{\partial g(y\,,\,z)}{\partial y} = 3y^2 \cos x + 2xy$$

比較可得 $\dfrac{\partial g(y\,,\,z)}{\partial y} = 0$，故 $g(y\,,\,z) = h(z)$，代回 (1) 式可得

$$f(x\,,\,y\,,\,z) = y^3 \cos x + xy^2 + 4x + h(z) \tag{2}$$

對 (2) 式兩端取 z 的偏微分可得 $\dfrac{\partial f}{\partial z} = h'(z) = -6$，故

$$h(z) = \int (-6)\,dz = -6z + c \tag{3}$$

將 (3) 式代回 (2) 式可得 $f(x\,,\,y\,,\,z) = y^3 \cos x + xy^2 + 4x - 6z + c$

《另解》

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = -y^3 \sin x + y^2 + 4 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 \cos x + 2xy \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f = \displaystyle\int^x (-y^3 \sin x + y^2 + 4)\,dx \\ \quad = y^3 \cos x + xy^2 + 4x + h_1(y, z) \\ f = \displaystyle\int^y (3y^2 \cos x + 2xy)\,dy \\ \quad = y^3 \cos x + \boxed{xy^2} + h_2(x, z) \\ f = \displaystyle\int^z -6\,dz = -6z + h_3(x, y) \end{cases}$$

比較可得 $f(x\,,\,y\,,\,z) = y^3 \cos x + xy^2 + 4x - 6z + c$

15. 設 $u = f(x\,,\,y)$，$x = r\cos\theta$、$y = r\sin\theta$，試證：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$$

(b) $$\frac{\partial(x\,,\,y)}{\partial(u\,,\,v)}\cdot\frac{\partial(u\,,\,v)}{\partial(x\,,\,y)}=\frac{\partial(x\,,\,y)}{\partial(x\,,\,y)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial x} & \dfrac{\partial x}{\partial y}\\ \dfrac{\partial y}{\partial x} & \dfrac{\partial y}{\partial y}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1$$

6. 設 $u=xy$、$v=x^2-y^2$，$x=f(u\,,\,v)$、$y=g(u\,,\,v)$，求 $\dfrac{\partial(x\,,\,y)}{\partial(u\,,\,v)}$。

《解》 ☞

$$\begin{aligned}\frac{\partial(x\,,\,y)}{\partial(u\,,\,v)} &= \frac{1}{\dfrac{\partial(u\,,\,v)}{\partial(x\,,\,y)}}=\frac{1}{\begin{vmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y}\\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}}=\frac{1}{\begin{vmatrix}y & x\\ 2x & -2y\end{vmatrix}}\\ &= \frac{1}{-2y^2-2x^2}=-\frac{1}{2\sqrt{(x^2-y^2)^2+4x^2y^2}}\\ &= -\frac{1}{2\sqrt{v^2+4u^2}}\end{aligned}$$

7. 設 $f(x\,,\,y)=x^3y^3\tan^{-1}(\dfrac{y}{x})$，試證：$x\dfrac{\partial f}{\partial x}+y\dfrac{\partial f}{\partial y}=6f(x\,,\,y)$。

《証》 ☞ 令 $u=tx$、$v=ty$，故

$$f(u\,,\,v)=u^3v^3\tan^{-1}(\frac{v}{u})=(tx)^3(ty)^3\tan^{-1}\frac{ty}{tx}=t^6x^3y^3\tan^{-1}\frac{y}{x}=t^6f(x\,,\,y) \quad (1)$$

對 (1) 式兩端取 t 的微分

$$\frac{\partial}{\partial t}f(u\,,\,v)=\frac{\partial}{\partial t}\{t^6\,f(x\,,\,y)\}$$

可得

$$\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial t}=6t^5f(x\,,\,y)$$

即

$$x\cdot\frac{\partial f}{\partial u}+y\cdot\frac{\partial f}{\partial v}=6t^5f(x\,,\,y) \quad (2)$$

14. 設 $\begin{cases} F(u\,,\,v\,,\,x\,,\,y)=c_1 \\ G(u\,,\,v\,,\,x\,,\,y)=c_2 \end{cases}$，且 $u=f(x\,,\,y)$、$v=g(x\,,\,y)$，同時 $\dfrac{\partial(F\,,\,G)}{\partial(u\,,\,v)}\neq 0$，試證

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\dfrac{\partial(F\,,\,G)}{\partial(x\,,\,v)}}{\dfrac{\partial(F\,,\,G)}{\partial(u\,,\,v)}}\;;\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\dfrac{\partial(F\,,\,G)}{\partial(y\,,\,v)}}{\dfrac{\partial(F\,,\,G)}{\partial(u\,,\,v)}}\;;\quad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\dfrac{\partial(F\,,\,G)}{\partial(u\,,\,x)}}{\dfrac{\partial(F\,,\,G)}{\partial(u\,,\,v)}}\;;\quad \frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\dfrac{\partial(F\,,\,G)}{\partial(u\,,\,y)}}{\dfrac{\partial(F\,,\,G)}{\partial(u\,,\,v)}}$$

《証》 ☞ 因 $F(u\,,\,v\,,\,x\,,\,y)=c_1$，故

$$dF=F_u du+F_v dv+F_x dx+F_y dy=0 \tag{1}$$

又 $u=f(x\,,\,y)$、$v=g(x\,,\,y)$，故

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy \tag{2}$$

$$dv=\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy \tag{3}$$

(2)、(3) 兩式代回 (1) 式，可得

$$F_u(\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy)+F_v(\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy)+F_x dx+F_y dy=0$$

即

$$\boxed{(F_u\frac{\partial u}{\partial x}+F_v\frac{\partial v}{\partial x}+F_x)dx+(F_u\frac{\partial u}{\partial y}+F_v\frac{\partial v}{\partial y}+F_y)dy=0} \tag{4}$$

再由 $G(u\,,\,v\,,\,x\,,\,y)=c_2$，故

$$G=G_u du+G_v dv+G_x dx+G_y dy=0 \tag{5}$$

(2)、(3) 兩式代回 (1) 式，可得

$$G_u(\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy)+G_v(\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy)+G_x dx+G_y dy=0$$

即

$$(G_u\frac{\partial u}{\partial x}\boxed{+G_v\frac{\partial v}{\partial x}}+G_x)dx+(G_u\frac{\partial u}{\partial y}+G_v\frac{\partial v}{\partial y}+G_y)dy=0 \tag{6}$$

由 (4)、(6) 式可得

$$\begin{cases} F_u\dfrac{\partial u}{\partial x}+F_v\dfrac{\partial v}{\partial x}=-F_x \\ G_u\dfrac{\partial u}{\partial x}+G_v\dfrac{\partial v}{\partial x}=-G_x \end{cases} \tag{7}$$

由 (1) 式可得 $x^2 = y$，代回 (2) 式可得

$$-3(x^2)^2 - 3x = -3(x^4 + x) = x(x+1)(x^2 - x + 1) = 0$$

可解得 $x = 0$ 或 -1，因此 $f(x\,,\,y)$ 的臨界點爲 $P_1(0\,,\,0)$ 及 $P_2(-1\,,\,1)$。

(2) 極值的判別：因 $f_{xx} = 6x$、$f_{xy} = -3$、$f_{yy} = -6y$，故 Hessian 行列式爲

$$D(x\,,\,y) = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6x & -3 \\ -3 & -6y \end{vmatrix} = -36xy - 9$$

(a) 因 $D(P_1) = -9 < 0$，故函數 $f(x\,,\,y)$ 在 $P_1(0\,,\,0)$ 處爲鞍點。

(b) 因 $D(P_2) = 36 - 9 = 27 > 0$，且 $f_{xx}(P_2) = -6 < 0$，故 $f(x\,,\,y)$ 具有極大值爲 $f(P_2) = f(-1\,,\,1) = 1$。

3. 試求函數 $f(x\,,\,y) = \dfrac{1}{x} + xy - \dfrac{8}{y}$ 之極值。 《交大》

《解》 ☞ (1) 臨界點：因 $f(x\,,\,y) = \dfrac{1}{x} + xy - \dfrac{8}{y}$，故

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{1}{x^2} + y = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x + \frac{8}{y^2} = 0 \tag{2}$$

由 (1) 式可得 $y = \dfrac{1}{x^2}$，代回 (2) 式可得 $x + 8x^4 = 0$，即 $\boxed{x(1 + 8x^3) = 0\,,}$ 故可解得 $x = 0$ (不合)，$x = -\dfrac{1}{2}$，則 $y = 4$，因此 $f(x\,,\,y)$ 的臨界點爲 $P(-\dfrac{1}{2}\,,\,4)$。

(2) 極值判別：因 $f_{xx} = \dfrac{2}{x^3}$、$f_{xy} = 1$、$f_{yy} = -\dfrac{16}{y^3}$，故 Hessian 行列式爲

$$D(x\,,\,y) = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{2}{x^3} & 1 \\ 1 & -\dfrac{16}{y^3} \end{vmatrix} = -\frac{32}{x^3y^3} - 1$$

因 $D(P) = 3 > 0$，且 $f_{xx}(P) = -16 < 0$，故 $f(x\,,\,y)$ 有極大值爲 $f(-\dfrac{1}{2}\,,\,4) = -2 - 2 - 2 = -6$

4. 設 $f(x\,,\,y) = x^3 + 3xy^2 - 3x^2 - 3y^2 + 4$，試問 $f(x\,,\,y)$ 在何處有極值或鞍點。

21. 求函數 $f(x\,,\,y\,,\,z)=x-y+z^2$ 在條件 $y^2+z^2=1$ 及 $x+y=2$ 之下的極值。

《台大》

《解》 ☞ 令 $G_1(x\,,\,y\,,\,z)=y^2+z^2-1=0$、$G_2(x\,,\,y\,,\,z)=x+y-2=0$，再令

$$H(x\,,\,y\,,\,z)=x-y+z^2+\lambda_1(y^2+z^2-1)+\lambda_2(x+y-2)$$

由

$$\begin{aligned}
&\nabla f\cdot(\nabla G_1\times\nabla G_2)\\
&=\begin{vmatrix} f_x & f_y & f_z\\ (G_1)_x & (G_1)_y & (G_1)_z\\ (G_2)_x & (G_2)_y & (G_2)_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -1 & 2z\\ 0 & 2y & 2z\\ 1 & 1 & 0\end{vmatrix}=-4yz-4z=0 \qquad (1)\\
&G_1=y^2+z^2-1=0 \qquad (2)\\
&G_2=x+y-2=0 \qquad (3)
\end{aligned}$$

由 (1) 式可得 $z(y+1)=0$, 故 $z=0$、$y=-1$，當 $z=0$ 代回 (2) 式可得 $y^2-1=0$, 則 $y=\pm1$, 當 $y=1$ 代回 (3) 式可得 $x=1$, 當 $y=-1$ 代回 (3) 式可得 $x=3$，故 $(x\,,\,y\,,\,z)=(1\,,\,1\,,\,0)$ 或 $(3\,,\,-1\,,\,0)$，則

$$f(1\,,\,1\,,\,0)=1-1+0=0$$

$$f(3\,,\,-1\,,\,0)=3-(-1)+0=4$$

故 $f(x\,,\,y\,,\,z)$ 的極大值為 4，極小值為 0。

22. Find the maximum value of the function $f(x\,,\,y\,,\,z)=x+2y+3z$ on the curve of intersection of the plane $x-y+z=1$ and the cylinder $x^2+y^2=1$. 《台綜大C》

《解》 ☞ 令 $G_1=x^2+y^2-1=0$、$G_2=x-y+z-1=0$，再令

$$H(x\,,\,y\,,\,z)=x+2y+3z+\lambda_1(x^2+y^2-1)+\lambda_2(x-y+z-1)$$

由

$$\nabla f\cdot(\nabla G_1\times\nabla G_2)=\begin{vmatrix}1&2&3\\2x&2y&0\\1&-1&1\end{vmatrix}=-10x-4y=0 \tag{1}$$

$$G_1=x^2+y^2-1=0 \tag{2}$$

$$G_2=x-y+z-1=0 \tag{3}$$

由 (1) 式可得 $y=-\dfrac{5}{2}x$，代回 (2) 式可得

$$x^2+(-\frac{5}{2}x)^2=1$$

故 $x=\pm\dfrac{2}{\sqrt{29}}$, 則 $y=\mp\dfrac{5}{\sqrt{29}}$，代回 (3) 式可得 $z=1\mp\dfrac{7}{\sqrt{29}}$，臨界點爲

$P_1(x\,,\,y\,,\,z)=(\dfrac{2}{\sqrt{29}}\,,\,-\dfrac{5}{\sqrt{29}}\,,1-\dfrac{7}{\sqrt{29}})$，$P_2(x\,,\,y\,,\,z)=(-\dfrac{2}{\sqrt{29}}\,,\,\dfrac{5}{\sqrt{29}}\,,\,1+\dfrac{7}{\sqrt{29}})$

$$f(\frac{2}{\sqrt{29}}\,,\,-\frac{5}{\sqrt{29}}\,,\,1-\frac{7}{\sqrt{29}})=3-\sqrt{29}$$

$$f(-\frac{2}{\sqrt{29}}\,,\,\frac{5}{\sqrt{29}}\,,\,1+\frac{7}{\sqrt{29}})=3+\sqrt{29}$$

故 $f(x\,,\,y\,,\,z)$ 的極大値爲 $3+\sqrt{29}$，極小値爲 $3-\sqrt{29}$。

23. Find the maximum and minimum values of $2x^2+y^2+2x$ for $x^2+y^2\leq 1$.《成大》

《提示》 ➥ 本題有區域範圍的限定，故是要求函數的絕對極值。求解的方法爲找出所有臨界點的函數值, 最大値爲絕對極大値, 最小値爲絕對極小値。

《解》 ☞ (1) 先討論限制條件爲 $x^2+y^2<1$：令

$$f(x\,,\,y)=2x^2+y^2+2x$$

由

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=4x+2=0\\[2mm]\dfrac{\partial f}{\partial y}=2y=0\end{cases}$$

由 (1) 式可得 $4xy = 0$，故 $x = 0$、$y = 0$，將 $x = 0$ 代回 (2) 式可得

$$y^2 - 1 = 0 \;\Rightarrow\; y = \pm 1$$

將 $y = 0$ 代回 (2) 式可得

$$x^2 - 1 = 0 \;\Rightarrow\; x = \pm 1$$

故臨界點為 $P_2(0\,,\,1)$、$P_3(0\,,\,-1)$、$P_4(1\,,\,0)$、$P_5(-1\,,\,0)$，又

$$u(0\,,\,\pm 1) = 3\,,\; u(\pm 1\,,\,0) = 2$$

(3) 由 (1)、(2) 可知，在 $x^2 + y^2 \le 1$ 的限制下，$u(x\,,\,y)$ 的極大值為 3，極小值為 0。

26. Find the extreme values of $f(x\,,\,y) = 2x^2 + 3y^2 - 4x - 5$ on the disk $x^2 + y^2 \le 16$.
《台聯A2A3》

《解》 ☞ (1) 先討論限制條件為 $x^2 + y^2 < 16$：由

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 4x - 4 = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 6y = 0 \end{cases}$$

可得 $x = 1$、$y = 0$，故臨點為 $P_1(1\,,\,0)$，又 $f(1\,,\,0) = -7$。

(2) 再討論限制條件為 $x^2 + y^2 = 16$，令 $g(x\,,\,y) = x^2 + y^2 - 16 = 0$，再令

$$H(x\,,\,y) = f(x\,,\,y) + \lambda g(x\,,\,y)$$

則

$$\frac{f_x}{g_x} = \frac{f_y}{g_y} \;\Rightarrow\; \frac{4x - 4}{2x} = \frac{6y}{2y} \qquad (1)$$

$$g(x\,,\,y) = 0 \;\Rightarrow\; g(x\,,\,y) = x^2 + y^2 - 16 = 0 \qquad (2)$$

由 (1) 式可得 $y(x + 2) = 0$，故 $x = -2$、$y = 0$，將 $x = -2$ 代回 (2) 式可得

$$4 + y^2 - 16 = 0 \;\Rightarrow\; y = \pm 2\sqrt{3}$$

將 $y = 0$ 代回 (2) 式可得

$$x^2 - 16 = 0 \;\Rightarrow\; x = \pm 4$$

7.8 Leibniz 微分公式

1. 設 $f(x\,,\,t)$ 及 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ 在 $a \le x \le b$, $u \le t \le v$ 爲連續的函數，且 $u'(x)$ 及 $v'(x)$ 在區間 $(a\,,\,b)$ 內爲連續函數，則

$$\frac{d}{dx}\int_{u(x)}^{v(x)} f(x\,,\,t)\,dt = \int_{u(x)}^{v(x)} \frac{\partial f}{\partial x}\,dt + f(x\,,\,v(x))v'(x) - f(x\,,\,u(x))u'(x)$$

2. 設 $f(x\,,\,t)$ 及 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ 在 $a \le x \le b$, $u \le t$ 爲連續的函數，且 $u'(x)$ 在區間 $(a\,,\,b)$ 內爲連續函數，同時 $\exists\, M(x\,,\,t)$ 使得 $|\dfrac{\partial f}{\partial x}| \le M(x\,,\,t)$ ，且 $\displaystyle\int_{u(x)}^{\infty} M(x\,,\,t)\,dt$ 收斂，則

$$\frac{d}{dx}\int_{u(x)}^{\infty} f(x\,,\,t)\,dt = \int_{u(x)}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial x}\,dt - f(x\,,\,u(x))u'(x)$$

因此 $F(1)=\int_0^{\infty} e^{-x^2}\cos 2x dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-1}=\frac{\sqrt{\pi}}{2e}$

4. Let $f(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}+2\sin x} \sin(y+x\cos y)\,dy$. It follows that $f'(0)=?$ 《台大B》

《解》☞

$$\begin{aligned} f'(x) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}+2\sin x}\cos(y+x\cos y)\cdot\cos y\,dy \\ &\quad +\sin\left[\frac{\pi}{2}+2\sin x+x\ \cos(\frac{\pi}{2}+2\sin x)\right]\cdot 2\cos x \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} f'(0) &= \sin(\frac{\pi}{2})\cdot 2\cos 0+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 y\,dy \\ &= 2+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2y}{2}\,dy \\ &= 2+(\frac{y}{2}+\frac{1}{4}\sin 2y)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=2+\frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

5. 試證 $\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}=\frac{\pi}{2}$。

《証》☞ 令 $F(\alpha)=\int_0^{\infty}\frac{e^{-\alpha x}\sin x}{x}\,dx$，則

$$\begin{aligned} \frac{dF}{d\alpha} &= \int_0^{\infty}\frac{\partial}{\partial\alpha}(\frac{e^{-\alpha x}\sin x}{x})\ dx=\int_0^{\infty}\frac{-xe^{-\alpha x}\sin x}{x}\ dx=-\int_0^{\infty}e^{-\alpha x}\sin x\ dx \\ &= -\frac{1}{\alpha^2+1}(-\alpha e^{-\alpha x}\sin x-e^{-\alpha x}\cos x)\Big|_0^{\infty}=-\frac{1}{\alpha^2+1} \end{aligned}$$

故

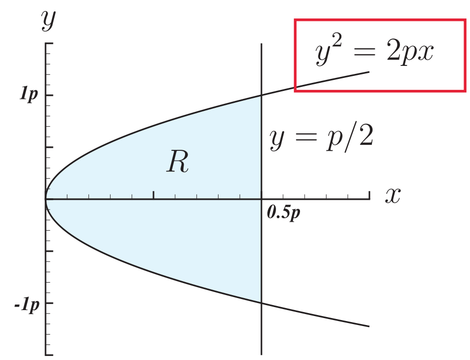
$$\int dF=\int\frac{-1}{\alpha^2+1}\ d\alpha\ \Rightarrow\ F(\alpha)=-\tan^{-1}\alpha+c$$

取 $\alpha\to\infty$，則

$$\lim_{\alpha\to\infty}F(\alpha)=\lim_{\alpha\to\infty}\int_0^{\infty}\frac{e^{-\alpha x}\sin x}{x}\ dx=0=-\frac{\pi}{2}+c$$

故 $c=\frac{\pi}{2}$，即 $F(\alpha)=-\tan^{-1}\alpha+\frac{\pi}{2}$，因此

$$F(0)=\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx=-\tan^{-1}0+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$$

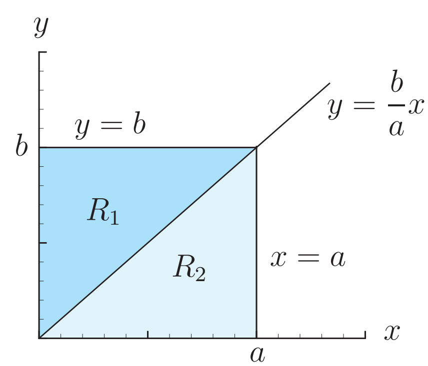


《解》 ☞

$$\begin{aligned}\iint_R xy^2\,dx\,dy &= \int_{x=0}^{x=\frac{p}{2}}\int_{y=-\sqrt{2px}}^{y=\sqrt{2px}} xy^2\,dy\,dx\\ &= \int_{x=0}^{x=\frac{p}{2}} \frac{2}{3}x\sqrt{(2px)^3}\;dx = \frac{2}{3}\cdot(2p)^{\frac{3}{2}}\int_0^{\frac{p}{2}} x^{\frac{5}{2}}\;dx\\ &= \frac{2}{3}\cdot(2p)^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}\Big|_0^{\frac{p}{2}} = \frac{2}{3}\cdot(2p)^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{2}{7}\cdot(\frac{p}{2})^{\frac{7}{2}}\\ &= \frac{p^5}{21}\end{aligned}$$

7. If a and b are positive constants and if $\max\{p\,,\,q\}$ denotes the maximum between the numbers p and q, the iterated integral $\displaystyle\int_0^a\int_0^b e^{\max\{b^2x^2\,,\,a^2y^2\}}dydx = ?$

《台大B》



《解》 ☞ 令 R 的區域為 $x = 0$、$x = a$、$y = 0$、$y = b$ 所圍的區域 (如圖)。現將 R 分成 R_1 $(a^2y^2 > b^2x^2)$ 兩區域 及 R_2 $(b^2x^2 > a^2y^2)$，故

$$\int_0^a\int_0^b e^{\max\{b^2x^2\,,\,a^2y^2\}}dydx = \iint_R e^{\max\{b^2x^2\,,\,a^2y^2\}}dydx$$

11. (a) $\displaystyle\int_0^1\int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}\,dy\,dx$ (b) $\displaystyle\int_0^1\int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}\boxed{dx\,dy}$

(c) Do the answers contradict Fubini's Theorem ? Explain why ?

《解》 ☞ (a) 因
$$\int_{y=0}^{y=1}\frac{x-y}{(x+y)^3}\,dy = \int_{y=0}^{y=1}\frac{2x-(x+y)}{(x+y)^3}\,dy = \int_{y=0}^{y=1}\frac{2x}{(x+y)^3}\,dy + \int_{y=0}^{y=1} -\frac{1}{(x+y)^2}\,dy = -\frac{x}{(x+y)^2}\Big|_{y=0}^{y=1} + \frac{1}{x+y}\Big|_{y=0}^{y=1} = \frac{1}{(1+x)^2}$$

$$\int_0^1\int_0^1\frac{x-y}{(x+y)^3}\,dy\,dx = \int_0^1\frac{1}{(1+x)^2}\,dx = -\frac{1}{1+x}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

(b)
$$\int_0^1\int_0^1\frac{x-y}{(x+y)^3}\,dx\,dy = \int_0^1 -\frac{1}{(1+y)^2}\,dy = \frac{1}{1+y}\Big|_0^1 = -\frac{1}{2}$$

(c) 因 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x-y}{(x+y)^3}$ = 不存在，即在積分的區域中，函數 $\dfrac{x-y}{(x+y)^3}$ 不爲有界 (bounded) 的函數，故 Fubini's theorem 不成立，因此

$$\int_0^1\int_0^1\frac{x-y}{(x+y)^3}\,dy\,dx \neq \int_0^1\int_0^1\frac{x-y}{(x+y)^3}\,dx\,dy$$

12. 求 $\displaystyle\int_0^1\frac{\ln(1+x^2)}{x^2}\,dx$

《解》 ☞ 因 $\displaystyle\frac{\ln(1+x^2)}{x^2} = \int_{y=0}^{y=1}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\ln(1+yx^2)}{x^2}\right)dy = \int_0^1\frac{1}{1+yx^2}\,dy$，$x>0$，故

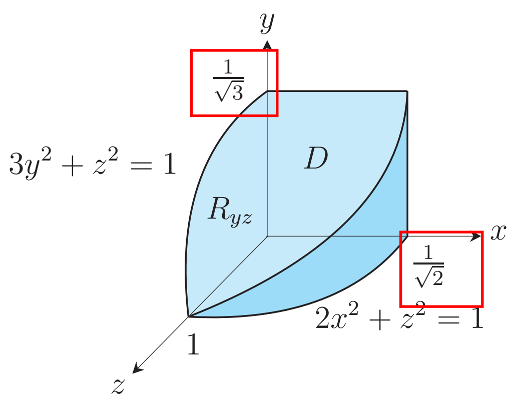
$$\begin{aligned}
\int_0^1\frac{\ln(1+x^2)}{x^2}\,dx &= \int_0^1\left\{\int_0^1\frac{1}{1+yx^2}\,dy\right\}dx = \int_0^1\left\{\int_0^1\frac{1}{1+yx^2}\,dx\right\}dy \\
&= \int_0^1\frac{\tan^{-1}(x\sqrt{y})}{\sqrt{y}}\Big|_{x=0}^{x=1}dy = \int_0^1\frac{\tan^{-1}(\sqrt{y})}{\sqrt{y}}\,dy \\
&= \int_0^1\tan^{-1}(\sqrt{y})\cdot 2d(\sqrt{y}\,) \\
&= 2\left\{\sqrt{y}\cdot\tan^{-1}(\sqrt{y})\,\Big|_0^1 - \int_0^1\sqrt{y}\cdot d(\tan^{-1}(\sqrt{y}))\right\} \\
&= 2\left\{\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln(1+y)\,\Big|_0^1\right\} = \frac{\pi}{2}-\ln 2
\end{aligned}$$

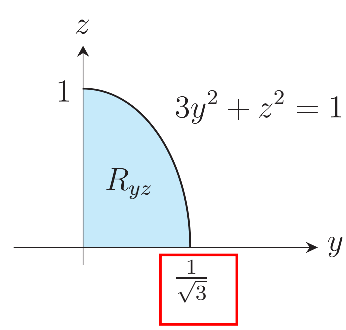
$$\begin{aligned}
&= \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}(2-y-z)\ dz\,dy \\
&= 4\int_{-1}^{1}\sqrt{1-y^2}dy-2\int_{-1}^{1}y\sqrt{1-y^2}\ dy \\
&= 8\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\ d\theta=2\pi
\end{aligned}$$

(c) 體積爲

$$\begin{aligned}
V &= \int_{y=-2}^{y=1}\int_{z=y^2}^{z=2-y}\int_{x=-\sqrt{z-y^2}}^{x=\sqrt{z-y^2}}dx\,dz\,dy \\
&= 2\int_{-2}^{1}\int_{y^2}^{2-y}\sqrt{z-y^2}\ dz\,dy \\
&= \frac{4}{3}\int_{-2}^{1}(2-y-y^2)^{3/2}\ dy \\
&= \frac{4}{3}\int_{-2}^{1}\{\frac{9}{4}-(y+\frac{1}{2})^2\}^{3/2}\ dy \quad (\text{令 } u=y+\frac{1}{2}) \\
&= \frac{4}{3}\int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}}\{(\frac{3}{2})^2-u^2\}^{3/2}\ du=\frac{81\pi}{32}
\end{aligned}$$

(d)

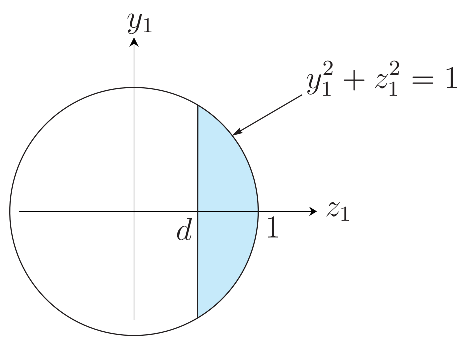


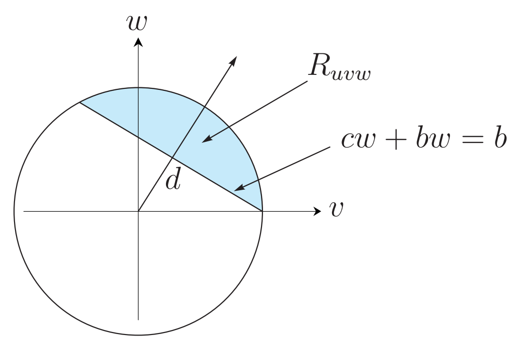


設 R_{yz} 爲區域 D 在 yz 平面上的投影, 則 R_{yz} ： $3y^2+z^2=1$, 故體積爲

$$\begin{aligned}
V &= 8\iiint_D dxdydz=8\iint_{R_{yz}}\int_{x=0}^{x=\sqrt{\frac{1-z^2}{2}}}dxdydz \\
&= 8\iint_{R_{yz}}\sqrt{\frac{1-z^2}{2}}\ dydz=8\int_{z=0}^{z=1}\int_{y=0}^{y=\sqrt{\frac{1-z^2}{3}}}\sqrt{\frac{1-z^2}{2}}\ dydz \\
&= 8\iint_{z=0}^{z=1}\frac{1-z^2}{\sqrt{6}}dz=\frac{8}{\sqrt{6}}\cdot\frac{2}{3}=\frac{16}{3\sqrt{6}}
\end{aligned}$$

32. Let R be the region inside the ellipsoid $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$, where a, b, $c>0$, and above the plane $z=b-y$, then the volume of the region R is ______. 《台聯》





《解》 ☞

(1) 在 $x_1^2+y_1^2+z_1^2=1$ 內及平面 $z_1=d$ 上的區域的體積爲 V_1, 則

$$V_1=\int_{z_1=d}^{z_1=1}\pi\cdot(1-z_1^2)\,dz_1=\pi\,(\frac{d^3}{3}-d+\frac{2}{3})$$

(2) 設 R 的體積爲 V，令 $u=\dfrac{x}{a}$、$v=\dfrac{y}{b}$、$w=\dfrac{z}{c}$，代回區域 R 中可得 R_{uvw} 爲

$$u^2+v^2+w^2=1\ \text{ 內及平面 }\ cw=b-bv\ \text{ 上}$$

所圍的區域, 令 R_{uvw} 的體積爲 V_2，因 $dxdydz=abc\,dudvdw$, 故 $V=abcV_2$，又原點到平面 $cw+bv=b$ 的距離爲

$$d=\frac{|0+0-b|}{\sqrt{b^2+c^2}}=\frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}}$$

故 R 的體積爲 $V=abc\,V_2=abc\boxed{\cdot\,\pi\,\cdot}\Big[\dfrac{1}{3}(\dfrac{b}{\sqrt{b^2+c^2}})^3-\dfrac{b}{\sqrt{b^2+c^2}}+\dfrac{2}{3}\Big]$

故 $\left|\dfrac{\partial(x\,,\,y\,,\,z)}{\partial(u\,,\,v\,,\,w)}\right| = \dfrac{abc}{2}w^{-\frac{1}{2}}$，且 D 在第一象限的區域爲 D_{uvw}，則

$$D_{uvw}\ :\ u^2+v^2+w^2 \le 1\,,\ (u\,,\,v\,,\,w \ge 0)$$

再令

$$\begin{cases} u = \rho\sin\phi\cos\theta \\ v = \rho\sin\phi\sin\theta \\ w = \rho\cos\theta \end{cases} \Rightarrow \left|\frac{\partial(u\,,\,v\,,\,w)}{\partial(\rho\,,\,\theta\,,\,\phi)}\right| = \rho^2\sin\phi$$

設 D_{uvw} 用 ρ、ϕ、θ 表示爲 $D_{\rho\phi\theta}$，則

$$D_{\rho\phi\theta}\ ;\ 0\le\rho\le 1\,,\ 0\le\phi\le\frac{\pi}{2}\,,\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$$

$$\begin{aligned}
\iiint_D dx\,dy\,dz &= 8\iiint_{D_{uvw}} \frac{abc}{2}w^{-\frac{1}{2}}\ du\,dv\,dw \\
&= 8\iint_{D_{\rho\phi\theta}} \frac{abc}{2}(\rho\,\cos\phi)^{-\frac{1}{2}}\,\rho^2\sin\phi\ d\rho\,d\phi\,d\theta \\
&= 8\int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}}\int_{\phi=0}^{\phi=\frac{\pi}{2}}\int_{\rho=0}^{\rho=1} \frac{abc}{2}(\rho\,\cos\phi)^{-\frac{1}{2}}\cdot\rho^2\sin\phi\ d\rho\,d\phi\,d\theta \\
&= 4abc\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{-\frac{1}{2}}\phi\,\sin\phi\ d\phi\cdot\int_0^1\rho^{\frac{3}{2}}\ d\rho \\
&= 4abc\cdot\left(\theta\,\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\ \right)\cdot\left(-2\cos^{\frac{1}{2}}\phi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\ \right)\cdot\left(\frac{2}{5}\rho^{\frac{5}{2}}\Big|_0^1\ \right) \\
&= \boxed{4abc\cdot}\frac{\pi}{2}\cdot 2\cdot\frac{2}{5} = \frac{8\pi}{5}abc
\end{aligned}$$

23. 求曲面 $(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2})^{\frac{3}{2}} = \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}$ 所圍區域 D 之體積。

《解》 ☞ 令 $\begin{cases} u = \dfrac{x}{a} \\ v = \dfrac{y}{b} \\ w = \dfrac{z}{c} \end{cases} \Rightarrow \left|\dfrac{\partial(x\,,\,y\,,\,z)}{\partial(u\,,\,v\,,\,w)}\right| = abc$

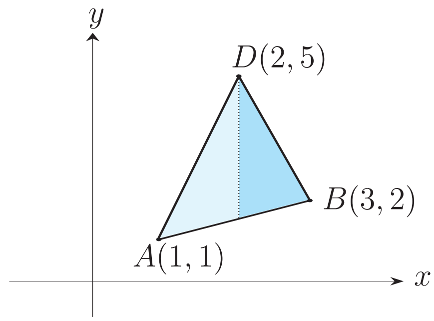
則區域 D_{uvw} 的方程式爲 $(u^2+v^2+w^2)^{\frac{3}{2}} = u^2+v^2$，再令

$$\begin{cases} u = \rho\sin\phi\cos\theta \\ v = \rho\sin\phi\sin\theta \\ w = \rho\cos\phi \end{cases} \Rightarrow \left|\frac{\partial(u\,,\,v\,,\,w)}{\partial(\rho\,,\,\theta\,,\,\phi)}\right| = \rho^2\sin\phi$$

習題解答

1. $\frac{4}{9}$
2. $\frac{1}{4}$
3. $2\pi\{\sqrt{1+a^2}-1\}$
4. $\frac{\pi}{2}$
5. $\pi(\cos\pi^2-\cos 4\pi^2)$
6. 2π
7. $\frac{32}{9}$
8. $\frac{3}{4}\pi$
9. $\frac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1)$
10. $\pi(e^{-1}-e^{-4})$
11. $2\sqrt{3}\pi$
12. $\frac{a^2}{16}\pi^2$
13. $\frac{32}{9}$
14. $\frac{3}{4}(e-e^{-1})$
15. $\frac{9}{4}(e-e^{-1})$
16. $\frac{\pi^4}{3}$
17. $\frac{13}{3}(1-\frac{1}{2}\sin 2)$
18. $\sin 1\cdot\frac{3}{2}$
19. $\frac{13}{3}(e-e^{-1})$
20. $4\cdot(5e^4-1)$
21. $2\pi\cdot\sqrt{\pi}$
22. $\frac{1}{8}$
23. 2
24. $\ln 5\cdot\{\tan^{-1}5-\tan^{-1}1\}$
25. $-\frac{24}{25}$
26. $\frac{4\sqrt{2}}{3}$
27. $\frac{1}{2}\ln 2\cdot(e^2-e)$
28. $(e^{-1}-e^{-4})\cdot\ln 3$
29. $3\ln 2\boxed{(e^{-\frac{1}{2}}-e^{-2})}$
30. $4\pi(2-\tan^{-1}2)$
31. $\frac{4}{15}\pi$
32. $4\pi(\sin\sqrt{2}-\sin 1)$
33. $\frac{\pi a^3}{6}$
34. (a) $\frac{4\pi}{3}abc$ (b) 0
35. $\frac{abc}{90}$
36. 2π
37. $\frac{7}{2}\pi$
38. $\frac{\pi}{2}$
39. $-\frac{512}{9}+\frac{128}{3}\pi$
40. $\frac{10}{3}\pi$
41. $\frac{a^3bc}{3}\pi$
42. $\frac{\sqrt{2}}{3}\pi$
43. π
44. $\frac{1}{6}(e^3-1)\cdot(-1+e)\pi$

4. 求 $\oint_C (x+y)^2\,dx-(x^2+y^2)\,dy$，$C$ 為以 $(1,1)$、$(3,2)$、$(2,5)$ 為頂點的三角形的邊界。



《解》 ☞ $\overrightarrow{AB}=(2,1)$、$\boxed{\overrightarrow{AD}}=(1,4)$，$\boxed{\Delta ABD}$ 的面積為

$$A=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\boxed{\overrightarrow{AD}}|=\frac{7}{2}$$

且 $\boxed{\Delta ABD}$ 的形心為 $(\overline{x},\overline{y})$，其中

$$\overline{x}=\frac{1}{3}(1+3+2)=2\text{，}\ \overline{y}=\frac{1}{3}(1+2+5)=\frac{8}{3}$$

故

$$\begin{aligned}\oint_C (x+y)^2\,dx-(x^2+y^2)\,dy &= \iint_R\{\frac{\partial}{\partial x}(-(x^2+y^2))-\frac{\partial}{\partial y}(x+y)^2\}\,dx\,dy\\ &= \iint_R(-4x-2y)\,dx\,dy=(-4\overline{x}-2\overline{y})\cdot A\\ &= (-4\cdot 2-2\cdot\frac{8}{3})\cdot\frac{7}{2}=-\frac{140}{3}\end{aligned}$$

5. 求 $I=\oint_C(\frac{4x-y}{4x^2+y^2}dx+\frac{x+y}{4x^2+y^2}dy)$，其中 C 為內部包含原點且方向為逆時針的簡單封閉曲線。 《交大》

《解》 ☞ 令 R 為 C 及 C_1 所圍的區域，其中 C_1 的方程式為 $4x^2+y^2=\rho^2$ $(\rho\to 0^+)$, 即 C_1 為以原點為中心的橢圓 (如圖)，又

$$\frac{\partial}{\partial x}(\frac{x+y}{4x^2+y^2})=\frac{\partial}{\partial y}(\frac{4x-y}{4x^2+y^2})$$

《解》 ☞ 令 R 爲 C 及 C_1 所圍的區域，其中 C_1 的方程式爲 $x^2+y^2=\rho^2$ $(\rho \to 0^+)$, 即 C_1 爲以原點爲中心的圓 (如圖)，又

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right)$$

且 $\dfrac{-y}{x^2+y^2}$ 、 $\dfrac{x}{x^2+y^2}$ ，在 R 中函數及一階偏導數連續，故由第 559 頁的複連通 Green's 定理可知

$$\oint_C \frac{-y\ dx+x\ dy}{x^2+y^2} = \oint_{C_1} \frac{-y\ dx+x\ dy}{x^2+y^2} \quad (\boxed{C_1}: x=\rho\cos\theta、y=\rho\sin\theta\ )$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{-\rho\sin\theta d(\rho\cos\theta)+\rho\cos\theta d(\rho\sin\theta)}{\rho^2} = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi$$

《另解》 令曲線 C 的參數式爲 C : $x=r(\theta)\cos\theta$ 、$y=r(\theta)\sin\theta$，且 $\theta=0\sim 2\pi$，故

$$\oint_C \frac{-y\ dx+x\ dy}{x^2+y^2} = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \frac{-r(\theta)\sin\theta\ d(r(\theta)\cos\theta)+r(\theta)\cos\theta\ d(r(\theta)\sin\theta)}{r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta}$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{-r\sin\theta\cos\theta\,dr+r^2\sin^2\theta\,d\theta+r\cos\theta\sin\theta\,dr+r^2\cos^2\theta\,d\theta}{r^2}$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi$$

---

7. Compute the line integral $\displaystyle\oint_C -\frac{y^3}{(x^2+y^2)^2}dx+\frac{xy^2}{x^2+y^2}\,dy$, where C is the circle $x^2+y^2=4$ in the counterclockwise direction. 《中山機電》

《解》 ☞ C : $x^2+y^2=4$ 的參數式爲 $\begin{cases} x=2\cos\theta \\ y=2\sin\theta \end{cases}$; $\theta=0\sim 2\pi$，故

$$\oint_C -\frac{y^3}{(x^2+y^2)^2}dx+\frac{xy^2}{x^2+y^2}\,dy$$

$$= \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \left\{-\frac{(2\sin\theta)^3}{4^2}\,d(2\cos\theta)+\frac{2\cos\theta\cdot(2\sin\theta)^2}{4}\,d(2\sin\theta)\right\}$$

$$= \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} (\sin^4\theta+4\cos^2\theta\cdot\sin^2\theta)\,d\theta = 4\cdot\frac{1}{2}B\left(\frac{5}{2},\frac{1}{2}\right)+4\cdot 4\cdot\frac{1}{2}B\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$$

$$= \frac{3}{4}\pi+\pi = \frac{7}{4}\pi$$

---

8. Evaluate the line integral $\displaystyle\oint_C \frac{-y^3dx+xy^2dy}{(x^2+y^2)^2}$, where C is the ellipse $x^2+4y^2=4$.

《解》☞ 令曲面 $z=y^2-x^2$ 與柱面 $x^2+y^2=1$ 相交的區域 S，投影到 xy 平面上的區域爲 R，故 R 的方程式爲 $z=0$、$x^2+y^2=1$，則

$$dA=\sqrt{1+(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2}\,dx\,dy=\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dx\,dy$$

$$\begin{aligned}
A &= \iint_S dA=\iint_R\sqrt{1+(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2}\,dx\,dy\\
&= \iint_R\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dx\,dy\\
&\quad (\text{ 令 } x=r\cos\theta\text{、}y=r\sin\theta\text{、}0\le r\le 1\text{ ，}0\le\theta\le 2\pi\text{ })\\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^1\sqrt{1+4r^2}\;r\;dr d\theta=\int_0^{2\pi}\frac{1}{12}(1+4r^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1\,d\theta\\
&= \frac{1}{12}(5\sqrt{5}-1)\int_0^{2\pi}\,d\theta=\frac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1)
\end{aligned}$$

6. Let T be the surface in $\mathbb{R}^3$ given by the equation 《台大A》

$$(\sqrt{x^2+y^2}-2)^2+z^2=1$$

Compute the surface integral $\int_T |z|\,dS$, where dS denote the element of surface.

《解》☞ 令 $F(x\,,\,y\,,\,z)=(\sqrt{x^2+y^2}-2)^2+z^2=1$，故

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{x(\sqrt{x^2+y^2}-2)}{\sqrt{x^2+y^2}\;z}\;;\;\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{y(\sqrt{x^2+y^2}-2)}{\sqrt{x^2+y^2}\;z}$$

故

$$\begin{aligned}
dS &= \sqrt{(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2+1}\;dxdy\\
&= \sqrt{\frac{(\sqrt{x^2+y^2}-2)^2+z^2}{z^2}}\;dxdy\quad (\text{ 代入 }(\sqrt{x^2+y^2}-2)^2+z^2=1\text{ })\\
&= \frac{1}{|z|}\,dxdy
\end{aligned}$$

令 $z=0$，可得

$$(\sqrt{x^2+y^2}-2)^2=1\;\Rightarrow\;\sqrt{x^2+y^2}-2=\pm 1$$

即 T 投影在 xy 平面上的區域 R_{xy} 為 $1 \le \sqrt{x^2+y^2} \le 3$，又 z 用 $-z$ 代回 T 的方程式

$$(\sqrt{x^2+y^2}-2)^2+z^2=1$$

方程式不變，故 T 的圖形對稱 xy 平面，因 T 在 xy 平面上的投影的區域為 R_{xy}，故

$$\boxed{\begin{aligned}\int_T |z|\,dS &= 2\int_{(T\,,\,z\ge 0)} z\,dS = 2\iint_{R_{xy}} z\cdot\frac{1}{z}\,dxdy\\ &= 2\iint_{R_{xy}} dxdy = 2[\pi\cdot 3^2-\pi\cdot 1^2]\\ &= 16\pi\end{aligned}}$$

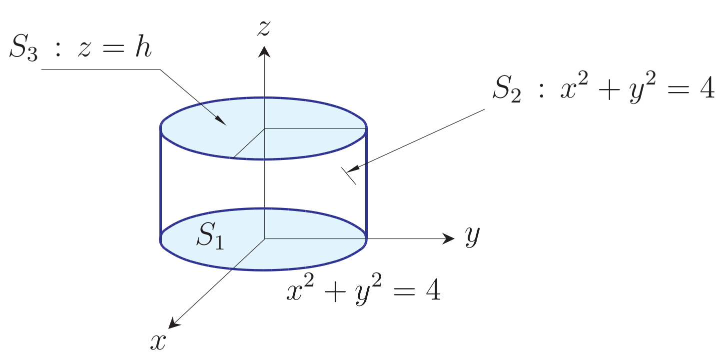
7. Evaluate the integral $\iint_S xy\,dS$, where the surface 《台綜大C》

$$S=\{(x\,,\,y\,,\,z)\mid x^2+y^2=1\,,\ x\ge 0\,,\ y\ge 0\,,\ 0\le z\le 1\}$$

《解》 ☞ 令 $x=\cos\theta$、$y=\sin\theta$、$z=z$，$\theta=0\sim\dfrac{\pi}{2}$，$0\le z\le 1$，
且圓柱側面的 $dS=1\cdot d\theta\,dz$，故

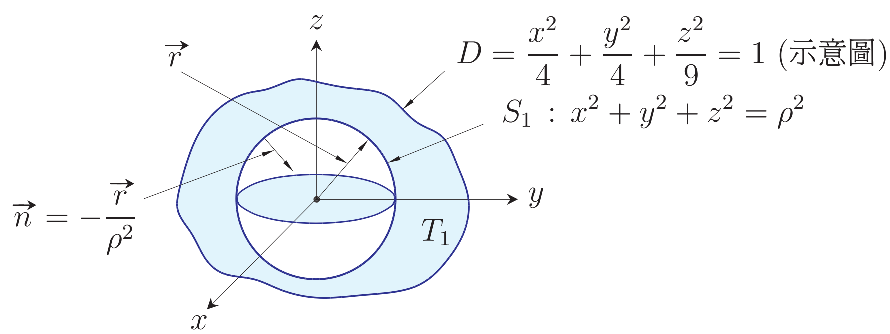
$$\iint_S xy\,dS=\int_{z=0}^{z=1}\int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}}\cos\theta\cdot\sin\theta\ d\theta\,dz=\int_{z=0}^{z=1}\frac{1}{2}\sin^2\theta\,\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}dz=\frac{1}{2}$$

8. Determine the surface integral of function $f=x^2z$ over the entire surface of the circular cylinder of height h which stands on the circle $x^2+y^2=4$ as shown below. 《交大》



《解》 ☞ 令曲面 $S=S_1+S_2+S_3$，如圖

15. Let $\vec{F}(x\,,\,y\,,\,z)=\dfrac{x\,\vec{i}+y\,\vec{j}+z\,\vec{k}}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$ and let $D=\{(x\,,\,y\,,\,z)\mid \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{4}+\dfrac{z^2}{9}=1\}$.
Find the flux of $\vec{F}$ outward across the boundary of D. 《台綜大C》



《解》 ☞ 令 $\vec{r}=x\,\vec{i}+y\,\vec{j}+z\,\vec{k}$ ，$R=|\vec{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, 則

$$\nabla\cdot(\frac{\vec{r}}{R^3})=\nabla\frac{1}{R^3}\cdot\vec{r}+\frac{1}{R^3}(\nabla\cdot\vec{r})=-\frac{3}{R^4}\,\frac{\vec{r}}{R}\cdot\vec{r}+\frac{3}{R^3}=0$$

令 S_1 爲球心爲原點, 半徑爲 ρ ($\rho\to 0^+$) 之球面, 即 S_1 的方程式爲

$$\phi(x,y,z)=x^2+y^2+z^2=\rho^2$$

再令 $D+S_1$ 的曲面所圍的區域爲 T_1 。故 $\dfrac{\vec{r}}{R^3}$ 在曲面 $D+S_1$ 上及 T_1 內，函數及一階偏導數均爲連續，由 Gauss's 散度定理可知

$$\begin{aligned}\iint_{D+S_1}(\frac{\vec{r}}{R^3}\cdot\vec{n})dA &= \iint_D(\frac{\vec{r}}{R^3}\cdot\vec{n})dA+\iint_{S_1}(\frac{\vec{r}}{R^3}\cdot\vec{n})dA\\ &= \iiint_{T_1}(\nabla\cdot\frac{\vec{r}}{R^3})\,dxdydz=0\end{aligned}$$

故

$$\iint_D\frac{\vec{r}}{R^3}\cdot\vec{n}dA=-\iint_{S_1}\frac{\vec{r}}{R^3}\cdot\vec{n}dA$$

因 S_1 的方程式爲 $\phi=x^2+y^2+z^2=\rho^2$ ，故 S_1 的單位法向量爲

$$\vec{n}=\pm\frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|}=\pm\frac{x\,\vec{i}+y\,\vec{j}+z\,\vec{k}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\pm\frac{\vec{r}}{\rho}$$

因 Gauss's 散度定理規定, 曲面的單位法向爲指離區域的向量, 故 $\vec{n}$ 必須要取負號，即 $\vec{n}=-\dfrac{\vec{r}}{\rho}$ ，因此 $\vec{F}$ 對曲面 D 的 flux 爲

$$\begin{aligned}\iint_D(\frac{\vec{r}}{R^3}\cdot\vec{n})dA &= -\iint_{S_1}(\frac{\vec{r}}{R^3}\cdot\vec{n})dA=-\iint_{S_1}(\frac{\vec{r}}{\rho^3})\cdot(-\frac{\vec{r}}{\rho})dA\\ &= \iint_{S_1}\frac{1}{\rho^2}\,dA=\frac{1}{\rho^2}\cdot 4\pi\rho^2=4\pi\end{aligned}$$