

喻超凡老師的家

超凡小鋪網址：<http://www.pcstore.com.tw/superyu>



工數神父喻超凡 Facebook 網址：
<http://www.facebook.com/mathsuperyu>



喻超凡雲端翻轉數學教室：<http://www.superyu.idv.tw>



序

數學是所有科學之母，洩漏天機的語言，微積分這一門學問，它是僅次於歐氏幾何為數學上最偉大的成就之一，也是近代所有理工商等學門的基礎學科，因此是研讀理工商同學必修的一門課程，但是因為它的理論艱澀繁瑣，枯燥難學，所以是很多莘莘學子在學習上的一大夢魘。近年來由於數位科技的發達和網路的普及化下，學校在雲端，教室在網路，沒有上下課的鐘聲，上課的黑板永遠不會被擦掉，忘掉了可隨時回頭再複習，只要上網就可上課，進度可自行控制，同學是自己學習課程的主人，翻轉教室 (flipped classroom)、MOOC (Massive Open Online Course)、個人學習 (personalized learning) 現在已是整個世界學習的主流趨勢，因此喻超凡老師秉著服務同學的初衷，參考國內外著名之微積分叢書，以及在國立大學及全國各大補習班任教的教學心得，提綱挈領的將重點及觀念，以結構化的方式放在每一章節的開始，並於每一章節的精選範例中，加入重要的題型做整體而詳細的思路分析和講解說明，精編細撰出這本“翻轉微積分”，期能幫助想藉由翻轉學習的同學，在短時間內能對微積分有全盤性的認識及了解，進而讓同學翻轉成績，翻轉未來。

“翻轉微積分”的所有影音教學內容均由喻超凡老師親自製作拍攝講解，並放置於喻超凡老師的雲端翻轉教室中，歡迎同學上網觀看自我學習，網址為 <http://www.superyu.idv.tw>。本書手稿雖經多次修訂及校對，但仍難免有所疏漏之處，敬請各位老師和同學不吝賜教。



喻超凡雲端教室

喻超凡

2015. 6.

目錄

4	定積分及其應用	1
4.1	定積分(The Definite Integral)	1
4.1.1	定積分的基本性質	1
4.1.2	積分均值定理	2
4.1.3	微積分基本定理	3
4.2	黎曼和與數值積分	41
4.2.1	黎曼和(Riemann Sum)	41
4.2.2	數值積分	43
4.3	瑕積分(Improper Integral)	63
4.3.1	瑕積分的類型	63
4.3.2	瑕積分的斂散性	65
4.3.3	常見的重要瑕積分	66
4.4	平面面積、體積及弧長	112
4.4.1	平面面積	112
4.4.2	體積	113
4.4.3	弧長	113
4.4.4	平面的弧及區域的形心	114
4.5	旋轉體的表面積與體積	159
4.5.1	旋轉體的表面積	159
4.5.2	旋轉體的體積	160
4.5.3	Pappus 定理	161
5	級數	185
5.1	常數級數	185
5.1.1	常數級數定義	185
5.1.2	常數級數的審斂法	187
5.2	冪級數	224
5.2.1	定義	224

5.2.2	均勻收斂	224
5.2.3	收斂半徑與收斂區間	225
5.3	Taylor's 級數與 Maclaurin's 級數	245
5.3.1	定義	245
5.3.2	Maclaurin's 級數展開式	246
5.4	級數和與近似值	260
5.4.1	級數和	260
5.4.2	近似值	261
6	向量分析	273
6.1	向量基本運算	273
6.1.1	向量的基本性質	273
6.1.2	加減法	274
6.1.3	數積 (Scalar product)	274
6.1.4	內積 (Dot product)	275
6.1.5	外積 (Cross product)	276
6.1.6	純量的三重積 (Triple scalar product)	277
6.1.7	向量的三重積 (Triple vector product)	278
6.2	空間平面	292
6.2.1	空間平面方程式	292
6.2.2	點到平面的距離	294
6.3	空間直線	302
6.3.1	空間直線方程式	302
6.3.2	直線的距離	304
6.4	空間曲面與空間曲線	318
6.4.1	空間曲面的表示方法	318
6.4.2	空間曲面的描繪	319
6.4.3	空間曲線	320
7	偏微分	327
7.1	多變數函數的極限與連續	327
7.1.1	多變數函數的定義	327
7.1.2	極限與連續	328
7.2	偏導數	343
7.2.1	雙變數函數的偏導數	343
7.2.2	三變數函數的偏導數	344
7.2.3	∇ 運算子	345

7.2.4	Jacobian 行列式	346
7.3	連鎖定律	362
7.3.1	全微分	362
7.3.2	連鎖定律	364
7.4	方向導數	392
7.5	隱函數微分定理	394
7.6	法向量與切向量的應用	409
7.6.1	空間曲面的切平面與法線	409
7.6.2	空間曲線的法平面與切線	410
7.7	多變數函數極值	420
7.7.1	雙變數函數的極值	420
7.7.2	三變數函數的極值	421
7.7.3	有限制條件的函數極值	422
7.8	Leibnitz 微分公式	458
8	重積分(Multiple Integrals)	463
8.1	二重積分(Double Integrals)	463
8.1.1	定義與基本性質	463
8.1.2	積分的上下限(Iterated Integrals)	465
8.2	三重積分	495
8.2.1	定義與基本性質	495
8.2.2	積分的上下限(Iterated Integrals)	497
8.3	坐標軸變換	510
8.3.1	定理	510
8.3.2	圓柱坐標 (r, θ, z) 與極坐標 (r, θ)	511
8.3.3	球坐標 (ρ, ϕ, θ)	512
8.4	線積分及Green's 定理	562
8.4.1	線積分	562
8.4.2	與路徑無關的線積分(Conservative field or gradient field)	564
8.4.3	Green's 定理	565
8.5	面積分與散度定理及Stokes's 定理	583
8.5.1	面積分	583
8.5.2	Gauss's 散度定理與 Stokes's 定理	585

第 4 章 定積分及其應用

4.1 定積分 (The Definite Integral)

4.1.1 定積分的基本性質

1. 定義

(1) $\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(z_i) \Delta x_i$, 其中 $z_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ 。

(2) 定積分 $\int_a^b f(x) dx$ 的幾何意義, 為 $f(x)$ 的圖形在直線 $x = a$ 及 $x = b$ 之間與 x 軸所圍的總面積, 如圖 (4.1)。

(a) 在 x 軸上方的面積為正。

(b) 在 x 軸下方的面積為負。

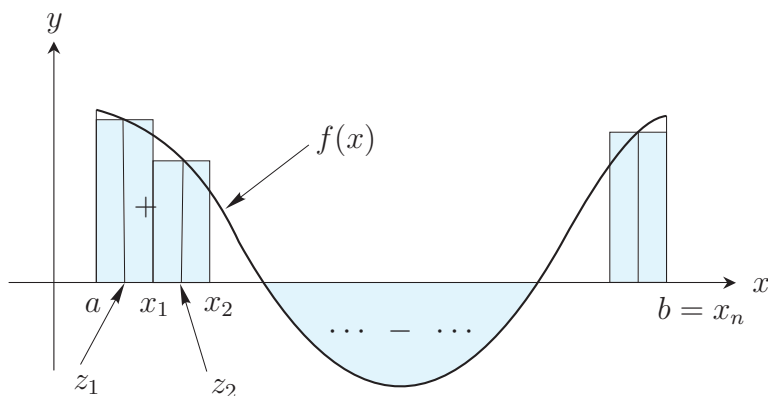


Figure 4.1: 定積分

2. 基本性質

(1) $\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$

$$(2) \int_a^a f(x) dx = 0$$

$$\text{故 } \int_a^b f(x) dx + \int_b^a f(x) dx = 0, \text{ 則 } \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

$$(3) \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(u) du$$

$$(4) \int_a^b \{f(x) \pm g(x)\} dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$$

$$(5) \int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx ; k \text{ 爲常數。}$$

$$(6) f(x) \leq g(x) \text{ 且 } (a < b), \text{ 則 } \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

$$(7) \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

4.1.2 積分均值定理

1. 設 $f(x)$ 在 $x \in [a, b]$ 中爲連續，則 $\exists c \in (a, b)$ ，使得

$$\int_a^b f(x) dx = f(c) (b - a)$$

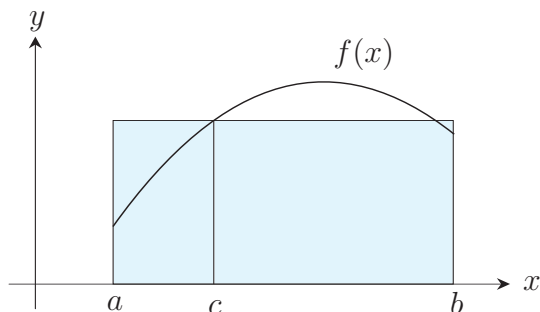


Figure 4.2: 積分均值定理

2. 等價的定義

$$(1) \int_a^{a+h} f(x) dx = f(a + \theta h) \cdot h ; (0 < \theta < 1)$$

$$(2) \int_a^b f(x) dx = f(c) \int_a^b 1 dx ; c \in (a, b)$$

$$(3) \int_a^b f(x)g(x) dx = f(c) \int_a^b g(x) dx ; c \in (a, b)$$

4.1.3 微積分基本定理

1. 微積分基本定理 (Fundamental Theorem of the Calculus)

設 f 在 $[a, b]$ 上為連續

$$(1) \text{ 若 } F(x) = \int_a^x f(t)dt, \forall x \in [a, b], \text{ 則 } F'(x) = f(x), \forall x \in (a, b)$$

(2) 若 $G(x)$ 為 $f(x)$ 之反導數, 則

$$\int_a^b f(x) dx = G(b) - G(a) = G(x) \Big|_a^b$$

2. 微積分基本定理推廣

$$(1) \text{ 若 } F(x) = \int_a^{u(x)} f(t) dt, \text{ 則}$$

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \int_a^{u(x)} f(t) dt = f(u(x)) u'(x)$$

$$(2) \text{ 若 } F(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t) dt, \text{ 則}$$

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \left\{ \int_a^{v(x)} f(t) dt - \int_a^{u(x)} f(t) dt \right\} = f(v(x)) \cdot v'(x) - f(u(x)) \cdot u'(x)$$

精選範例

1. 何謂積分均值定理 (Mean Value Theorem for definite integrals) ? 並證明之。

《解》

(1) 積分均值定理：設 $f(x)$ 在 $x \in [a, b]$ 中為連續，則 $\exists c \in (a, b)$ ，使得

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a)$$

(2) 因為 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 為連續，由極值定理可知

$$\exists u, v \in [a, b], \exists f(u) \leq f(x) \leq f(v), \forall x \in (a, b)$$

故

$$\int_a^b f(u) dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b f(v) dx$$

即

$$f(u)(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq f(v)(b-a)$$

上式同除 $(b-a)$ ，可得

$$f(u) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq f(v)$$

再由介值定理可知， $\exists c \in (u, v) \subset (a, b)$ ，使得

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

故

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a) ; c \in (a, b)$$

2. 何謂微積分基本定理 (The Fundamental Theorem of Calculus) ? 並證明之。

《解》

(1) 微積分基本定理：設 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 中為連續

(a) 若 $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, $\forall x \in [a, b]$, 則 $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in (a, b)$

(b) 若 $G(x)$ 為 $f(x)$ 之反導數, 則

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a) = G(x) \Big|_a^b$$

(2)

(a)

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \quad (\text{導數的定義得知}) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt}{h} \quad (F(x) \text{ 的定義得知}) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt}{h} \quad (\text{定積分的基本性質}) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_x^{x+h} f(t)dt}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+\theta h) \cdot h}{h}; \quad (0 < \theta < 1) \quad (\text{積分均值定理}) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} f(x+\theta h) \\ &= f(\lim_{h \rightarrow 0} (x+\theta h)) \quad (\text{連續性質}) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

(b) 因 $F'(x) = f(x)$ 、 $G'(x) = f(x)$, 故

$$F(x) = G(x) + k \tag{1}$$

令 $x = a$ 代回 (1) 式可得

$$F(a) = G(a) + k$$

即

$$F(a) = \int_a^a f(t)dt = 0 = G(a) + k$$

故 $k = -G(a)$ ，再令 $x = b$ 代回 (1) 式可得

$$F(b) = \int_a^b f(t)dt = G(b) + k = G(b) - G(a) = G(x) \Big|_a^b$$

3. 求極限值 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} \sin(t^2) dt}{x^6}$

《台大》

《提示》 $\rightarrow \frac{0}{0}$ 不定型

《解》 \Rightarrow

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} \sin(t^2) dt}{x^6} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^4 \cdot 2x}{6x^5} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^4}{3x^4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x^4 \cdot 4x^3}{12x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x^4}{3} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

4. Find $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x \exp(t^2) dt}{x^2}$.

《成大》

《提示》 $\rightarrow \frac{\infty}{\infty}$ 不定型

《解》 \Rightarrow

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x \exp(t^2) dt}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x^2}}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2xe^{x^2}}{2} = +\infty$$

$$5. \text{ 求 } \lim_{x \rightarrow \infty} x \int_0^x e^{(t^2-x^2)} dt .$$

《解》

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} x \int_0^x e^{(t^2-x^2)} dt &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \int_0^x e^{t^2} dt}{e^{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{d}{dx}(x \int_0^x e^{t^2} dt)}{\frac{d}{dx}e^{x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_0^x e^{t^2} dt + xe^{x^2}}{2xe^{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{d}{dx}(\int_0^x e^{t^2} dt + xe^{x^2})}{\frac{d}{dx}(2xe^{x^2})} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{x^2} + e^{x^2} + 2x^2e^{x^2}}{2e^{x^2} + 4x^2e^{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + x^2}{1 + 2x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{4x} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$6. \text{ 設函數 } f(x) \text{ 滿足 } f(x) = 1 + 3x^2 + 4x \int_0^1 f(x) dx, \text{ 求 } f(x) = ?$$

《解》 設 $\int_0^1 f(x) dx = A$, 故

$$A = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (1 + 3x^2 + 4x \cdot A) dx = (x + x^3 + 2x^2 \cdot A) \Big|_0^1 = 2 + 2A$$

則 $A = -2$, 故

$$f(x) = 1 + 3x^2 + 4x \cdot (-2) = 1 - 8x + 3x^2$$

7. 求下列之值

$$(a) \frac{d}{dx} \int_1^{2x} \frac{\sin t}{t^2} dt$$

$$(b) \frac{d}{dx} \int_{\sin^2 x}^{\cos^2 x} \sqrt{t} dt$$

《輔大》

《解》

$$(a) \frac{d}{dx} \int_1^{2x} \frac{\sin t}{t^2} dt = \frac{\sin(2x)}{(2x)^2} \cdot \frac{d}{dx}(2x) = \frac{\sin 2x}{(2x)^2} \cdot 2 = \frac{\sin 2x}{2x^2}$$

(b)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \int_{\sin^2 x}^{\cos^2 x} \sqrt{t} dt &= \frac{d}{dx} \left\{ \int_a^{\cos^2 x} \sqrt{t} dt - \int_a^{\sin^2 x} \sqrt{t} dt \right\} \\ &= \sqrt{\cos^2 x} \frac{d}{dx}(\cos^2 x) - \sqrt{\sin^2 x} \frac{d}{dx}(\sin^2 x) \\ &= |\cos x| \cdot 2 \cos x \cdot (-\sin x) - |\sin x| \cdot 2 \sin x \cdot \cos x \\ &= -\sin 2x \cdot (|\cos x| + |\sin x|) \end{aligned}$$

8. 已知 $f(x)$ 為連續函數，且 $\int_0^x f(t) dt = 3 + x + k \cos 2x$ ，試求

(a) k (b) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$ (c) $f'(\frac{\pi}{2})$

《解》

(a) 因

$$\int_0^x f(t) dt = 3 + x + k \cos 2x$$

令 $x = 0$ 代回上式可得

$$\int_0^0 f(t) dt = 3 + 0 + k = 0 \quad (\text{因 } f(x) \text{ 連續函數})$$

故 $k = -3$ 。

(b) 因

$$\int_0^x f(t) dt = 3 + x - 3 \cos 2x$$

對上式兩端微分

$$\frac{d}{dx} \int_0^x f(t) dt = \frac{d}{dx} (3 + x - 3 \cos 2x)$$

可得

$$f(x) = 1 + 6 \sin 2x$$

故

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + 6 \sin 2x) dx = (x - 3 \cos 2x) \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4} + 3$$

(c) 因 $f(x) = 1 + 6 \sin 2x$, 故 $f'(x) = 12 \cos 2x$, 則 $f'(\frac{\pi}{2}) = -12$ 。

9. 求 $\lim_{a \rightarrow 0} \int_a^{2a} \frac{e^{2x}}{x} dx$

《提示》 \rightarrow 積分均值定理僅適用於連續函數。

《解》 \Rightarrow 因 e^{2x} 為連續函數, 故 $\exists c \in (a, 2a)$, 使得

$$\begin{aligned} \int_a^{2a} \frac{e^{2x}}{x} dx &= e^{2c} \int_a^{2a} \frac{1}{x} dx = e^{2c} \ln |x| \Big|_a^{2a} \\ &= e^{2c} (\ln |2a| - \ln |a|) = e^{2c} \ln \left| \frac{2a}{a} \right| \\ &= e^{2c} \ln 2 \end{aligned}$$

因 $a < c < 2a$, 故 $a \rightarrow 0$ 時 $c \rightarrow 0$, 則

$$\lim_{a \rightarrow 0} \int_a^{2a} \frac{e^{2x}}{x} dx = \lim_{a \rightarrow 0} e^{2c} \ln 2 = \lim_{c \rightarrow 0} e^{2c} \ln 2 = \ln 2$$

10. 已知 $f(x)$ 為連續函數, 試證

(a) 若 $f(x)$ 為偶函數, 則 $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$

(b) 若 $f(x)$ 為奇函數, 則 $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$

《提示》 $\rightarrow f(-x) = f(x) \iff f(x)$ 為偶函數

$$f(-x) = -f(x) \iff f(x) \text{ 為奇函數}$$

《解》

(a) 因 $f(x)$ 為偶函數，故 $f(-x) = f(x)$ ，則

$$\begin{aligned}
 \int_{-a}^a f(x) dx &= \int_0^a f(x) dx + \int_{-a}^0 f(x) dx \\
 &\quad \left(\text{令 } u = -x, \text{ 故 } dx = -du, \begin{array}{c|c|c} x & -a & 0 \\ \hline u & a & 0 \end{array} \right) \\
 &= \int_0^a f(x) dx - \int_a^0 f(-u) du \\
 &= \int_0^a f(x) dx + \int_0^a f(-x) dx \\
 &= \int_0^a f(x) dx + \int_0^a f(x) dx \\
 &= 2 \int_0^a f(x) dx
 \end{aligned}$$

(b) 因 $f(x)$ 為奇函數，故 $f(-x) = -f(x)$ ，則

$$\begin{aligned}
 \int_{-a}^a f(x) dx &= \int_0^a f(x) dx + \int_{-a}^0 f(x) dx \\
 &\quad \left(\text{令 } u = -x, \text{ 故 } dx = -du, \begin{array}{c|c|c} x & -a & 0 \\ \hline u & a & 0 \end{array} \right) \\
 &= \int_0^a f(x) dx - \int_a^0 f(-u) du \\
 &= \int_0^a f(x) dx + \int_0^a f(-x) dx \\
 &= \int_0^a f(x) dx - \int_0^a f(x) dx \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

11. 求下列積分

(a) $\int_{-2}^2 \frac{\sin^3 x}{2 + \cos x} dx$

《淡大》

(b) $\int_{-7}^7 x^3 \sqrt{5x^6 + 3} dx$

《淡大》

(c) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \cos^2 x} dx$

《提示》 ➡ 先判斷被積函數是否為偶函數或奇函數。設 $f(x)$ 為 $x \in [-\ell, \ell]$ 的函數

1. 常見的奇函數： x 、 x^3 、 x^5 、 \dots ； $\sin(ax)$ 、 $\tan(ax)$ ； $\sin^{-1}(ax)$ 、 $\tan^{-1}(ax)$ ；
 $\sinh(ax)$ 、 $\tanh(ax)$
2. 常見的偶函數：常數、 x^2 、 x^4 、 \dots ； $\cos(ax)$ ； $\cosh(ax)$ ；|奇偶函數|； f (偶函數)
3. 奇偶函數的四則運算：

偶函數 $\times(\div)$ 偶函數 = 偶函數；奇函數 $\times(\div)$ 奇函數 = 偶函數

偶函數 $\times(\div)$ 奇函數 = 奇函數

偶函數 \pm 偶函數 = 偶函數；奇函數 \pm 奇函數 = 奇函數

偶函數 \pm 奇函數 = 不奇不偶的函數

《解》 ☞

(a) 因 $\sin^3 x$ 為奇函數， $2 + \cos x$ 為偶函數，故 $\frac{\sin^3 x}{2 + \cos x}$ 為奇函數，則

$$\begin{aligned} \int_{-2}^2 \frac{\sin^3 x}{2 + \cos x} dx &= 1 \int_0^2 \frac{\sin^3 x}{2 + \cos x} dx + \int_{-2}^0 \frac{\sin^3 x}{2 + \cos x} dx \\ &\quad (\text{令 } u = -x, \text{ 則 } dx = -du) \\ &= \int_0^2 \frac{\sin^3 x}{2 + \cos x} dx - \int_2^0 \frac{-\sin^3 u}{2 + \cos u} du \\ &= \int_0^2 \frac{\sin^3 x}{2 + \cos x} dx - \int_0^2 \frac{\sin^3 x}{2 + \cos x} dx = 0 \end{aligned}$$

(b) 因 x^3 為奇函數， $\sqrt{5x^6 + 3}$ 為偶函數，故 $x^3\sqrt{5x^6 + 3}$ 為奇函數，則

$$\begin{aligned} \int_{-7}^7 x^3 \sqrt{5x^6 + 3} dx &= \int_0^7 x^3 \sqrt{5x^6 + 3} dx + \int_{-7}^0 x^3 \sqrt{5x^6 + 3} dx \\ &\quad (\text{令 } u = -x, \text{ 則 } dx = -du) \\ &= \int_0^7 x^3 \sqrt{5x^6 + 3} dx - \int_7^0 (-u^3) \sqrt{5u^6 + 3} du \\ &= \int_0^7 x^3 \sqrt{5x^6 + 3} dx - \int_0^7 x^3 \sqrt{5x^6 + 3} dx = 0 \end{aligned}$$

(c) 因 $\sqrt{1 - \cos^2 x}$ 為偶函數，則

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \cos^2 x} dx &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin x| dx \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 (-\sin x) dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 (-\sin u) du + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx \\
&\quad (\text{令 } u = -x, \text{ 則 } dx = -du) \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx \\
&= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = 2(-\cos x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= 2
\end{aligned}$$

12. 求下列積分

(a) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^5 x dx$

《清大》 (b) $\int_{-2}^1 \frac{x}{\sqrt{3+x}} dx$

(c) $\int_0^1 x^2(1-x)^{10} dx$

《淡大》 (d) $\int_0^1 x^2 e^x dx$

《淡大》

《解》

(a)

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^5 x dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^4 x \cos x dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - \sin^2 x)^2 d(\sin x) \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - 2\sin^2 x + \sin^4 x) d(\sin x) \\
&= \left\{ \sin x - \frac{2}{3} \sin^3 x + \frac{1}{5} \sin^5 x \right\} \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \\
&= \frac{43\sqrt{2}}{120}
\end{aligned}$$

(b) 令 $u = \sqrt{3+x}$, 故 $u^2 = 3+x$, $2u du = dx$, 且

$$\begin{array}{c|c|c}
x & -2 & 1 \\
\hline
u & 1 & 2
\end{array}$$

則

$$\int_{-2}^1 \frac{x}{\sqrt{3+x}} dx = \int_1^2 \frac{u^2-3}{u} 2u du = 2 \int_1^2 (u^2-3) du$$

$$= 2\left\{\frac{1}{3}u^3 - 3u\right\}\Big|_1^2 = -\frac{4}{3}$$

(c) 令 $u = 1 - x$, 故 $dx = -du$, 且

$$\begin{array}{c|c|c} x & 0 & 1 \\ \hline u & 1 & 0 \end{array}$$

則

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^2(1-x)^{10} dx &= \int_1^0 (1-u)^2 u^{10} (-du) \\ &= \int_0^1 (u^{10} - 2u^{11} + u^{12}) du \\ &= \left\{ \frac{u^{11}}{11} - \frac{2}{12}u^{12} + \frac{u^{13}}{13} \right\} \Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \frac{1}{13} = \frac{1}{858} \end{aligned}$$

(d)

微	積
$+x^2$	e^x
$-2x$	e^x
$+2$	e^x
-0	e^x

$$\int_0^1 x^2 e^x dx = \{x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x\} \Big|_0^1 = e - 2e + 2e - 2 = e - 2$$

13. 求下列積分

(a) $\int_{-1}^2 |x^2 - x| dx$

《淡大》 (b) $\int_0^2 \min\{3x, 4 - x^2\} dx$

(c) $\int_2^7 x \left[\frac{x}{3} \right] dx$

《提示》 ➡ 先劃分積分區間, 以消除特殊函數。

《解》

(a) 令 $x^2 - x = 0$, 故 $x(x-1) = 0$, 則 $x = 0, 1$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^2 |x^2 - x| dx &= \int_{-1}^0 (x^2 - x) dx + \int_0^1 -(x^2 - x) dx + \int_1^2 (x^2 - x) dx \\ &= \left\{ \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right\} \Big|_{-1}^0 + \left\{ -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right\} \Big|_0^1 + \left\{ \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right\} \Big|_1^2 \\ &= 0 - \left(\frac{-1}{3} - \frac{1}{2} \right) + \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right) - 0 + \left(\frac{8}{3} - 2 \right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{11}{6} \end{aligned}$$

(b) 令 $3x < 4 - x^2$, 故 $x^2 + 3x - 4 < 0$, 即 $(x+4)(x-1) < 0$, 則 $-4 < x < 1$

$$\begin{aligned} \int_0^2 \min\{3x, 4 - x^2\} dx &= \int_0^1 \min\{3x, 4 - x^2\} dx + \int_1^2 \min\{3x, 4 - x^2\} dx \\ &= \int_0^1 3x dx + \int_1^2 (4 - x^2) dx \\ &= \frac{3}{2}x^2 \Big|_0^1 + \left(4x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_1^2 \\ &= \frac{3}{2} - 0 + \left(8 - \frac{8}{3} \right) - \left(4 - \frac{1}{3} \right) \\ &= \frac{19}{6} \end{aligned}$$

(c) 令 $\left[\frac{x}{3} \right] = n$, 故 $n \leq \frac{x}{3} < n+1$, 則 $3n \leq x < 3(n+1)$, 因此

$$\begin{aligned} \int_2^7 x \left[\frac{x}{3} \right] dx &= \int_2^3 (x \cdot 0) dx + \int_3^6 (x \cdot 1) dx + \int_6^7 (x \cdot 2) dx \\ &= 0 + \frac{x^2}{2} \Big|_3^6 + x^2 \Big|_6^7 \\ &= 18 - \frac{9}{2} + 49 - 36 = \frac{53}{2} \end{aligned}$$

14. (a) 試證 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) dx$

(b) 利用 (a) 求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n x}{\sin^n x + \cos^n x} dx$

《提示》 \rightarrow 利用互餘變換 (令 $u = \frac{\pi}{2} - x$) 證明。

《解》

(a) 令 $u = \frac{\pi}{2} - x$, 故 $dx = -du$, 且 $\begin{array}{c|c|c} x & 0 & \frac{\pi}{2} \\ \hline u & \frac{\pi}{2} & 0 \end{array}$, 則

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 f\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - u\right)\right)(-du) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos u) du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) dx$$

(b) 令

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n x}{\sin^n x + \cos^n x} dx \quad (1)$$

由 (a) 可知

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^n x}{\sin^n x + \cos^n x} dx \quad (2)$$

由 (1) 式 + (2) 式可得

$$\begin{aligned} 2I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n x}{\sin^n x + \cos^n x} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^n x}{\sin^n x + \cos^n x} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n x + \cos^n x}{\sin^n x + \cos^n x} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dx = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

故

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n x}{\sin^n x + \cos^n x} dx = \frac{\pi}{4}$$

15. (a) 試證 $\int_0^{\pi} x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx$

(b) 利用 (a) 求 $\int_0^{\pi} x \sin^2 x dx$

《提示》 \rightarrow 利用互補變換 (令 $u = \pi - x$) 證明。

《解》

(a)