喻超凡老師的家

超凡小鋪網址：http://www.pcstore.com.tw/superyu

工數神父喻超凡 Facebook 網址：
http://www.facebook.com/mathsuperyu

喻超凡雲端翻轉數學教室：http://www.superyu.idv.tw

序

數學是所有科學之母, 洩漏天機的語言，微積分這一門學問, 它是僅次於歐氏幾何為數學上最偉大的成就之一, 也是近代所有理工商等學門的基礎學科，因此是研讀理工商的同學必修的一門課程，但是因為它的理論艱澀繁瑣, 枯燥難學，所以是很多莘莘學子在學習上的一大夢魘。近年來由於數位科技的發達和網路的普及化下，學校在雲端，教室在網路，沒有上下課的鐘聲，上課的黑板永遠不會被擦掉，忘掉了可隨時回頭再複習，只要上網就可上課，進度可自行控制，同學是自己學習課程的主人，翻轉教室 (flipped classroom)、MOOC (Massive Open Online Course)、個人學習 (personalized learning) 現在已是整個世界學習的主流趨勢，因此喻超凡老師秉著服務同學的初衷，參考國內外著名之微積分叢書，以及在國立大學及全國各大補習班任教的教學心得，提綱挈領的將重點及觀念，以結構化的方式放在每一章節的開始，並於每一章節的精選範例中, 加入重要的題型做整體而詳細的思路分析和講解說明，精編細撰出這本"翻轉微積分"，期能幫助想藉由翻轉學習的同學，在短時間內能對微積分有全盤性的認識及了解，進而讓同學翻轉成績, 翻轉未來。

"翻轉微積分"的所有影音教學內容均由喻超凡老師親自製作拍攝講解，並放置於喻超凡老師的雲端翻轉教室中，歡迎同學上網觀看自我學習，網址為 http://www.superyu.idv.tw。本書手稿雖經多次修訂及校對, 但仍難免有所疏漏之處, 敬請各位老師和同學不吝賜教。

喻超凡雲端教室

喻超凡

2015. 6.

目錄

第 4 章 定積分及其應用

4.1 定積分 (The Definite Integral)

4.1.1 定積分的基本性質

1. 定義

(1) $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(z_i)\ \Delta x_i$，其中 $z_i \in [x_{i-1}\ x_i]$，$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$。

(2) 定積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ 的幾合意義，爲 $f(x)$ 的圖形在直線 $x=a$ 及 $x=b$ 之間與 x 軸所圍的總面積，如圖 (4.1)。

(a) 在 x 軸上方的面積爲正。

(b) 在 x 軸下方的面積爲負。

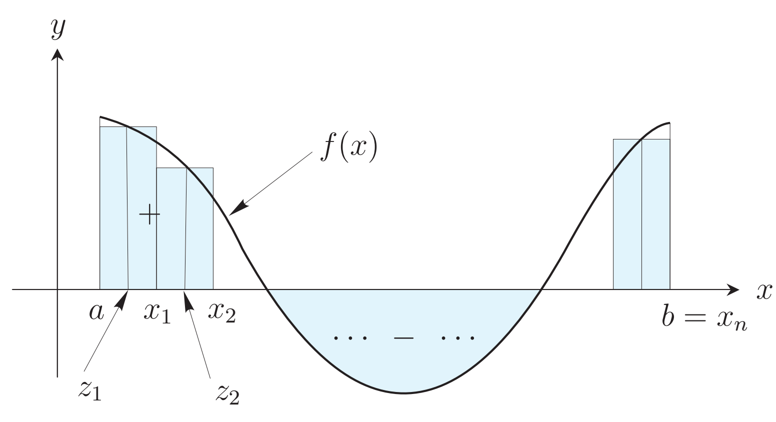

Figure 4.1: 定積分

2. 基本性質

(1) $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx + \int_b^c f(x)\ dx = \int_a^c f(x)\ dx$

(2) $\displaystyle\int_a^a f(x)\ dx = 0$

故 $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx + \int_b^a f(x)\ dx = 0$, 則 $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx = -\int_b^a f(x)\ dx$

(3) $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^b f(t)\ dt = \int_a^b f(u)\ du$

(4) $\displaystyle\int_a^b \{f(x) \pm g(x)\}\ dx = \int_a^b f(x)\ dx \pm \int_a^b g(x)\ dx$

(5) $\displaystyle\int_a^b k\,f(x)\ dx = k\int_a^b f(x)\ dx$; k 為常數。

(6) $f(x) \le g(x)$ 且 $(a < b)$, 則 $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx \le \int_a^b g(x)\ dx$

(7) $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)\ dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\ dx$

4.1.2 積分均值定理

1. 設 $f(x)$ 在 $x \in [a\,,\,b]$ 中為連續 , 則 $\exists c \in (a\,,\,b)$, 使得

$$\int_a^b f(x)\ dx = f(c)\,(b-a)$$

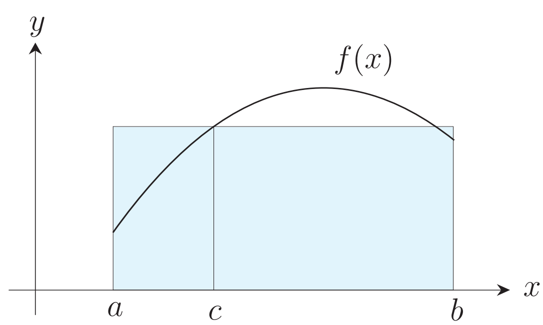

Figure 4.2: 積分均值定理

2. 等價的定義

(1) $\displaystyle\int_a^{a+h} f(x)\ dx = f(a+\theta h)\cdot h$; $(0 < \theta < 1)$

(2) $\int_a^b f(x)\ dx = f(c)\int_a^b 1\, dx \quad ; \quad c \in (a\,,\,b)$

(3) $\int_a^b f(x)g(x)\ dx = f(c)\int_a^b g(x)\ dx \quad ; \quad c \in (a\,,\,b)$

4.1.3 微積分基本定理

1. 微積分基本定理 (Fundamental Theorem of the Calculus)

設 f 在 $[a\,,\,b]$ 上為連續

(1) 若 $F(x) = \int_a^x f(t)dt\ ,\ \forall\, x \in [a\,,\,b\,]$, 則 $F'(x) = f(x)\ ,\ \forall\, x \in (a\,,\,b)$

(2) 若 $G(x)$ 為 $f(x)$ 之反導數 , 則

$$\int_a^b f(x)\ dx = G(b) - G(a) = G(x)\Big|_a^b$$

2. 微積分基本定理推廣

(1) 若 $F(x) = \int_a^{u(x)} f(t)\ dt$, 則

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^{u(x)} f(t)\ dt = f(u(x))\, u'(x)$$

(2) 若 $F(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\ dt$, 則

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\Big\{\int_a^{v(x)} f(t)\ dt - \int_a^{u(x)} f(t)\ dt\Big\} = f(v(x))\cdot v'(x) - f(u(x))\cdot u'(x)$$

精選範例

1. 何謂積分均值定理 (Mean Value Theorem for definite integrals)？並證明之。

《解》☞

(1) 積分均值定理：設 $f(x)$ 在 $x \in [a\,,b]$ 中為連續，則 $\exists c \in (a\,,b)$，使得

$$\int_a^b f(x)\ dx = f(c)\,(b-a)$$

(2) 因為 $f(x)$ 在 $[a\,,b]$ 為連續，由極值定理可知

$$\exists\, u\,,\,v \in [\,a\,,\,b\,]\,,\ni f(u) \le f(x) \le f(v)\,,\forall\, x \in (a\,,b)$$

故

$$\int_a^b f(u)\ dx \le \int_a^b f(x)\ dx \le \int_a^b f(v)\ dx$$

即

$$f(u)(b-a) \le \int_a^b f(x)\ dx \le f(v)(b-a)$$

上式同除 $(b-a)$，可得

$$f(u) \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ dx \le f(v)$$

再由介值定理可知，$\exists c \in (u\,,v) \subset (a\,,b)$，使得

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

故

$$\int_a^b f(x)\ dx = f(c)\,(b-a)\quad ;\quad c \in (a\,,b)$$

2. 何謂微積分基本定理 (The Fundamental Theorem of Calculus)？並證明之。

《解》 ☞

(1) 微積分基本定理：設 $f(x)$ 在 $[a\,,\,b]$ 中為連續

(a) 若 $F(x)=\displaystyle\int_a^x f(t)dt\ ,\ \forall\, x\in[a\,,\,b]$，則 $F'(x)=f(x)\ ,\ \forall\, x\in(a\,,\,b)$

(b) 若 $G(x)$ 為 $f(x)$ 之反導數，則

$$\int_a^b f(x)dx=G(b)-G(a)=G(x)\Big|_a^b$$

(2)

(a)

$$\begin{aligned}
F'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} \quad \text{（導數的定義得知）}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\displaystyle\int_a^{x+h} f(t)dt-\int_a^x f(t)dt}{h} \quad \text{（}F(x)\text{ 的定義得知）}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\displaystyle\int_a^{x} f(t)dt+\int_x^{x+h} f(t)dt-\int_a^x f(t)dt}{h} \quad \text{（定積分的基本性質）}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\displaystyle\int_x^{x+h} f(t)dt}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+\theta h)\cdot h}{h}\ ;\ (0<\theta<1) \quad \text{（積分均值定理）}\\
&= \lim_{h\to 0} f(x+\theta h)\\
&= f(\lim_{h\to 0}(x+\theta h)) \quad \text{（連續性質）}\\
&= f(x)
\end{aligned}$$

(b) 因 $F'(x)=f(x)$、$G'(x)=f(x)$，故

$$F(x)=G(x)+k \tag{1}$$

令 $x=a$ 代回 (1) 式可得

$$F(a)=G(a)+k$$

即

$$F(a) = \int_a^a f(t)dt = 0 = G(a) + k$$

故 $k = -G(a)$, 再令 $x = b$ 代回 (1) 式可得

$$F(b) = \int_a^b f(t)dt = G(b) + k = G(b) - G(a) = G(x)\Big|_a^b$$

3. 求極限值 $\lim_{x\to 0} \dfrac{\int_0^{x^2} \sin(t^2)\ dt}{x^6}$ 《台大》

《提示》 ➥ $\dfrac{0}{0}$ 不定型

《解》 ☞

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^{x^2} \sin(t^2)\ dt}{x^6} &= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x^4 \cdot 2x}{6x^5} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x^4}{3x^4} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x^4 \cdot 4x^3}{12x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x^4}{3} \\ &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

4. Find $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{\int_0^{x} \exp(t^2)\ dt}{x^2}$. 《成大》

《提示》 ➥ $\dfrac{\infty}{\infty}$ 不定型

《解》 ☞ $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{\int_0^{x} \exp(t^2)\ dt}{x^2} = \lim_{x\to +\infty} \dfrac{e^{x^2}}{2x} = \lim_{x\to +\infty} \dfrac{2xe^{x^2}}{2} = +\infty$

5. 求 $\lim\limits_{x\to\infty} x\int_0^x e^{(t^2-x^2)}\ dt$。

《解》 ☞

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} x\int_0^x e^{(t^2-x^2)}\ dt &= \lim_{x\to\infty}\frac{x\displaystyle\int_0^x e^{t^2}\ dt}{e^{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{d}{dx}(x\displaystyle\int_0^x e^{t^2}dt)}{\dfrac{d}{dx}e^{x^2}} \\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{\displaystyle\int_0^x e^{t^2}\ dt + xe^{x^2}}{2xe^{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{d}{dx}(\displaystyle\int_0^x e^{t^2}\ dt + xe^{x^2})}{\dfrac{d}{dx}(2xe^{x^2})} \\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{e^{x^2}+e^{x^2}+2x^2e^{x^2}}{2e^{x^2}+4x^2e^{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1+x^2}{1+2x^2} \\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{2x}{4x} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

6. 設函數 $f(x)$ 滿足 $f(x) = 1+3x^2+4x\int_0^1 f(x)\ dx$，求 $f(x) = ?$

《解》 ☞ 設 $\int_0^1 f(x)\ dx = A$，故

$$A = \int_0^1 f(x)\ dx = \int_0^1 (1+3x^2+4x\cdot A)\ dx = (x+x^3+2x^2\cdot A)\Big|_0^1 = 2+2A$$

則 $A=-2$，故

$$f(x) = 1+3x^2+4x\cdot(-2) = 1-8x+3x^2$$

7. 求下列之值

(a) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_1^{2x}\frac{\sin t}{t^2}\ dt$　　(b) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{\sin^2 x}^{\cos^2 x}\sqrt{t}\ dt$　　《輔大》

《解》☞

(a) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_1^{2x}\frac{\sin t}{t^2}\,dt = \frac{\sin(2x)}{(2x)^2}\cdot\frac{d}{dx}(2x) = \frac{\sin 2x}{(2x)^2}\cdot 2 = \frac{\sin 2x}{2x^2}$

(b)

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\int_{\sin x^2}^{\cos^2 x}\sqrt{t}\,dt &= \frac{d}{dx}\Big\{\int_a^{\cos^2 x}\sqrt{t}\,dt - \int_a^{\sin^2 x}\sqrt{t}\,dt\Big\} \\
&= \sqrt{\cos^2 x}\,\frac{d}{dx}(\cos^2 x) - \sqrt{\sin^2 x}\,\frac{d}{dx}(\sin^2 x) \\
&= |\cos x|\cdot 2\cos x\cdot(-\sin x) - |\sin x|\cdot 2\sin x\cdot\cos x \\
&= -\sin 2x\cdot(|\cos x| + |\sin x|)
\end{aligned}$$

8. 已知 $f(x)$ 爲連續函數，且 $\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt = 3 + x + k\,\cos 2x$，試求

(a) k (b) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx$ (c) $f'(\dfrac{\pi}{2})$

《解》☞

(a) 因

$$\int_0^x f(t)\,dt = 3 + x + k\,\cos 2x$$

令 $x = 0$ 代回上式可得

$$\int_0^0 f(t)\,dt = 3 + 0 + k = 0 \quad（因 f(x) 連續函數）$$

故 $k = -3$。

(b) 因

$$\int_0^x f(t)dt = 3 + x - 3\cos 2x$$

對上式兩端微分

$$\frac{d}{dx}\int_0^x f(t)dt = \frac{d}{dx}(3 + x - 3\cos 2x)$$

可得

$$f(x) = 1 + 6\sin 2x$$

故

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\ dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (1+6\sin 2x)dx = (x-3\cos 2x)\ \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}+3$$

(c) 因 $f(x)=1+6\sin 2x$，故 $f'(x)=12\cos 2x$，則 $f'(\frac{\pi}{2})=-12$ 。

9. 求 $\lim\limits_{a\to 0}\int_a^{2a} \frac{e^{2x}}{x}\ dx$

《提示》 ➥ 積分均值定理僅適用於連續函數 。

《解》 ☞ 因 e^{2x} 爲連續函數，故 $\exists\, c\in(a\,,\,2a)$，使得

$$\begin{aligned}\int_a^{2a} \frac{e^{2x}}{x}\ dx &= e^{2c}\int_a^{2a}\frac{1}{x}\ dx = e^{2c}\ \ln|x|\ \Big|_a^{2a}\\ &= e^{2c}(\ln|2a|-\ln|a|) = e^{2c}\ \ln|\frac{2a}{a}|\\ &= e^{2c}\ \ln 2\end{aligned}$$

因 $a<c<2a$，故 $a\to 0$ 時 $c\to 0$，則

$$\lim_{a\to 0}\int_a^{2a}\frac{e^{2x}}{x}dx = \lim_{a\to 0} e^{2c}\ \ln 2 = \lim_{c\to 0} e^{2c}\ \ln 2 = \ln 2$$

10. 已知 $f(x)$ 爲連續函數，試證

(a) 若$f(x)$ 爲偶函數，則$\int_{-a}^{a} f(x)\ dx = 2\int_0^a f(x)\ dx$

(b) 若$f(x)$ 爲奇函數，則$\int_{-a}^{a} f(x)\ dx = 0$

《提示》 ➥ $f(-x)=f(x) \Longleftrightarrow f(x)$ 爲偶函數

$f(-x)=-f(x) \Longleftrightarrow f(x)$ 爲奇函數

《解》☞

(a) 因 $f(x)$ 爲偶函數，故 $f(-x)=f(x)$，則

$$\begin{aligned}
\int_{-a}^{a} f(x)\,dx &= \int_{0}^{a} f(x)\,dx + \int_{-a}^{0} f(x)\,dx \\
&\quad (\text{令 } u=-x\text{，故 } dx=-du\text{，} \begin{array}{c|c|c} x & -a & 0 \\ \hline u & a & 0 \end{array}) \\
&= \int_{0}^{a} f(x)\,dx - \int_{a}^{0} f(-u)\,du \\
&= \int_{0}^{a} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(-x)\,dx \\
&= \int_{0}^{a} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx \\
&= 2\int_{0}^{a} f(x)dx
\end{aligned}$$

(b) 因 $f(x)$ 爲奇函數，故 $f(-x)=-f(x)$，則

$$\begin{aligned}
\int_{-a}^{a} f(x)\,dx &= \int_{0}^{a} f(x)\,dx + \int_{-a}^{0} f(x)\,dx \\
&\quad (\text{令 } u=-x\text{，故 } dx=-du\text{，} \begin{array}{c|c|c} x & -a & 0 \\ \hline u & a & 0 \end{array}) \\
&= \int_{0}^{a} f(x)\,dx - \int_{a}^{0} f(-u)\,du \\
&= \int_{0}^{a} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(-x)\,dx \\
&= \int_{0}^{a} f(x)\,dx - \int_{0}^{a} f(x)\,dx \\
&= 0
\end{aligned}$$

11. 求下列積分

(a) $\displaystyle\int_{-2}^{2} \frac{\sin^3 x}{2+\cos x}dx$ 《淡大》 (b) $\displaystyle\int_{-7}^{7} x^3\sqrt{5x^6+3}dx$ 《淡大》

(c) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\cos^2 x}dx$

《提示》 ➥ 先判斷被積函數是否爲偶函數或奇函數。設 $f(x)$ 爲 $x \in [-\ell, \ell]$ 的函數

1. 常見的奇函數：x、x^3、x^5、$\cdots$；$\sin(ax)$、$\tan(ax)$；$\sin^{-1}(ax)$、$\tan^{-1}(ax)$；

   $\sinh(ax)$、$\tanh(ax)$

2. 常見的偶函數：常數、x^2、x^4、$\cdots$；$\cos(ax)$；$\cosh(ax)$；$|$奇偶函數$|$；$f($偶函數$)$

3. 奇偶函數的四則運算：

   偶函數 $\times(\div)$ 偶函數 $=$ 偶函數 ； 奇函數 $\times(\div)$ 奇函數 $=$ 偶函數

   偶函數 $\times(\div)$ 奇函數 $=$ 奇函數

   偶函數 $\pm$ 偶函數 $=$ 偶函數 ； 奇函數 $\pm$ 奇函數 $=$ 奇函數

   偶函數 $\pm$ 奇函數 $=$ 不奇不偶的函數

《解》 ☞

(a) 因 $\sin^3 x$ 爲奇函數，$2+\cos x$ 爲偶函數，故 $\dfrac{\sin^3 x}{2+\cos x}$ 爲奇函數，則

$$\begin{aligned}
\int_{-2}^{2} \frac{\sin^3 x}{2+\cos x}\,dx &= 1\ \int_{0}^{2} \frac{\sin^3 x}{2+\cos x}\,dx + \int_{-2}^{0} \frac{\sin^3 x}{2+\cos x}\,dx \\
&\quad (\text{令 } u=-x\text{，則 } dx=-du\ ) \\
&= \int_{0}^{2} \frac{\sin^3 x}{2+\cos x}\,dx - \int_{2}^{0} \frac{-\sin^3 u}{2+\cos u}\,du \\
&= \int_{0}^{2} \frac{\sin^3 x}{2+\cos x}\,dx - \int_{0}^{2} \frac{\sin^3 x}{2+\cos x}\,dx = 0
\end{aligned}$$

(b) 因 x^3 爲奇函數，$\sqrt{5x^6+3}$ 爲偶函數，故 $x^3\sqrt{5x^6+3}$ 爲奇函數，則

$$\begin{aligned}
\int_{-7}^{7} x^3\sqrt{5x^6+3}\,dx &= \int_{0}^{7} x^3\sqrt{5x^6+3}\,dx + \int_{-7}^{0} x^3\sqrt{5x^6+3}\,dx \\
&\quad (\text{令 } u=-x\text{，則 } dx=-du\ ) \\
&= \int_{0}^{7} x^3\sqrt{5x^6+3}\,dx - \int_{7}^{0} (-u^3)\sqrt{5u^6+3}\,du \\
&= \int_{0}^{7} x^3\sqrt{5x^6+3}\,dx - \int_{0}^{7} x^3\sqrt{5x^6+3}\,dx = 0
\end{aligned}$$

(c) 因 $\sqrt{1-\cos^2 x}$ 爲偶函數，則

$$\begin{aligned}
\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\cos^2 x}\,dx &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin x|\,dx \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} (-\sin x)\,dx + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} (-\sin u)du + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx \\
&\quad (\text{令 } u = -x \text{ , 則 } dx = -du \text{ }) \\
&= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx \\
&= 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = 2(-\cos x)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= 2
\end{aligned}
$$

12. 求下列積分

(a) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \cos^5 x\ dx$ 《清大》 (b) $\displaystyle\int_{-2}^{1} \frac{x}{\sqrt{3+x}}\ dx$

(c) $\displaystyle\int_{0}^{1} x^2(1-x)^{10}\ dx$ 《淡大》 (d) $\displaystyle\int_{0}^{1} x^2 e^x\ dx$ 《淡大》

《解》 ☞

(a)

$$
\begin{aligned}
\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \cos^5 x\ dx &= \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \cos^4 x\ \cos x\ dx \\
&= \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} (1-\sin^2 x)^2\ d(\sin x) \\
&= \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} (1-2\sin^2 x+\sin^4 x)\, d(\sin x) \\
&= \{\sin x - \frac{2}{3}\sin^3 x + \frac{1}{5}\sin^5 x\}\Big|_{0}^{\frac{\pi}{4}} \\
&= \frac{43\sqrt{2}}{120}
\end{aligned}
$$

(b) 令 $u=\sqrt{3+x}$, 故 $u^2=3+x$, $2u\,du=dx$, 且

x	-2	1
u	1	2

則

$$
\int_{-2}^{1} \frac{x}{\sqrt{3+x}}\ dx = \int_{1}^{2} \frac{u^2-3}{u} 2u\ du = 2\int_{1}^{2} (u^2-3)\ du
$$

$$= \; 2\{\frac{1}{3}u^3 - 3u\}\Big|_1^2 = -\frac{4}{3}$$

(c) 令 $u = 1 - x$, 故 $dx = -du$, 且

x	0	1
u	1	0

則

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x^2(1-x)^{10}\,dx &= \int_1^0 (1-u)^2 u^{10}\,(-du) \\
&= \int_0^1 (u^{10} - 2u^{11} + u^{12})\,du \\
&= \{\frac{u^{11}}{11} - \frac{2}{12}u^{12} + \frac{u^{13}}{13}\}\Big|_0^1 \\
&= \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \frac{1}{13} = \frac{1}{858}
\end{aligned}$$

(d)

微	積
$+x^2$	e^x
$-2x$	e^x
$+2$	e^x
-0	e^x

$$\int_0^1 x^2 e^x\,dx = \{x^2\,e^x - 2x\,e^x + 2e^x\}\Big|_0^1 = e - 2e + 2e - 2 = e - 2$$

13. 求下列積分

(a) $\displaystyle\int_{-1}^{2} |x^2 - x|\,dx$ 《淡大》 (b) $\displaystyle\int_0^2 \min\{3x\,,\,4 - x^2\}\,dx$

(c) $\displaystyle\int_2^7 x\left[\frac{x}{3}\right]dx$

《提示》 ➥ 先劃分積分區間, 以消除特殊函數。

《解》☞

(a) 令 $x^2-x=0$，故 $x(x-1)=0$，則 $x=0$、1

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{2}|x^2-x|\ dx &= \int_{-1}^{0}(x^2-x)\ dx+\int_{0}^{1}-(x^2-x)dx+\int_{1}^{2}(x^2-x)dx\\ &= \{\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\}\Big|_{-1}^{0}+\{-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\}\Big|_{0}^{1}+\{\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\}\Big|_{1}^{2}\\ &= 0-(\frac{-1}{3}-\frac{1}{2})+(-\frac{1}{3}+\frac{1}{2})-0+(\frac{8}{3}-2)-(\frac{1}{3}-\frac{1}{2})\\ &= \frac{11}{6}\end{aligned}$$

(b) 令 $3x<4-x^2$，故 $x^2+3x-4<0$，即 $(x+4)(x-1)<0$，則 $-4<x<1$

$$\begin{aligned}\int_{0}^{2}\min\{3x\,,\,4-x^2\}\ dx &= \int_{0}^{1}\min\{3x\,,\,4-x^2\}\ dx+\int_{1}^{2}\min\{3x\,,\,4-x^2\}\ dx\\ &= \int_{0}^{1}3x\ dx+\int_{1}^{2}(4-x^2)\ dx\\ &= \frac{3}{2}x^2\Big|_{0}^{1}+(4x-\frac{x^3}{3})\Big|_{1}^{2}\\ &= \frac{3}{2}-0+(8-\frac{8}{3})-(4-\frac{1}{3})\\ &= \frac{19}{6}\end{aligned}$$

(c) 令 $\left[\frac{x}{3}\right]=n$，故 $n\le\frac{x}{3}<n+1$，則 $3n\le x<3(n+1)$，因此

$$\begin{aligned}\int_{2}^{7}x\left[\frac{x}{3}\right]\ dx &= \int_{2}^{3}(x\cdot 0)\ dx+\int_{3}^{6}(x\cdot 1)\ dx+\int_{6}^{7}(x\cdot 2)\ dx\\ &= 0+\frac{x^2}{2}\Big|_{3}^{6}+x^2\Big|_{6}^{7}\\ &= 18-\frac{9}{2}+49-36=\frac{53}{2}\end{aligned}$$

14. (a) 試證 $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)\ dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}f(\cos x)\ dx$

(b) 利用 (a) 求 $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^n x}{\sin^n x+\cos^n x}\ dx$

《提示》➥ 利用互餘變換（令 $u=\frac{\pi}{2}-x$）證明。

《解》 ☞

(a) 令 $u=\frac{\pi}{2}-x$，故 $dx=-du$，且 $\begin{array}{c|c|c} x & 0 & \frac{\pi}{2} \\ \hline u & \frac{\pi}{2} & 0 \end{array}$，則

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^0 f\Big(\sin(\frac{\pi}{2}-u)\Big)(-du)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos u)du=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$$

(b) 令

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^n x}{\sin^n x+\cos^n x}dx \tag{1}$$

由 (a) 可知

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^n x}{\sin^n x+\cos^n x}dx \tag{2}$$

由 (1) 式 + (2) 式可得

$$\begin{aligned} 2I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^n x}{\sin^n x+\cos^n x}\ dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^n x}{\sin^n x+\cos^n x}\ dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^n x+\cos^n x}{\sin^n x+\cos^n x}\ dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\ dx=\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

故

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^n x}{\sin^n x+\cos^n x}\ dx=\frac{\pi}{4}$$

15. (a) 試證 $\int_0^{\pi} xf(\sin x)\ dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\ dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\ dx$

(b) 利用 (a) 求 $\int_0^{\pi} x\sin^2 x\ dx$

《提示》 ➥ 利用互補變換（令 $u=\pi-x$）證明。

《解》 ☞

(a)