序

數學是所有科學之母, 洩漏天機的語言，微積分這一門學問, 它是僅次於歐氏幾何為數學上最偉大的成就之一, 也是近代所有理工商等學門的基礎學科，因此是研讀理工商的同學必修的一門課程，但是因為它的理論艱澀繁瑣, 枯燥難學，所以是很多莘莘學子在學習上的一大夢魘。近年來由於數位科技的發達和網路的普及化下，學校在雲端，教室在網路，沒有上下課的鐘聲，上課的黑板永遠不會被擦掉，忘掉了可隨時回頭再複習，只要上網就可上課，進度可自行控制，同學是自己學習課程的主人，翻轉教室 (flipped classroom)、MOOC (Massive Open Online Course)、個人學習 (personalized learning) 現在已是整個世界學習的主流趨勢，因此喻超凡老師秉著服務同學的初衷，參考國內外著名之微積分叢書，以及在國立大學及全國各大補習班任教的教學心得，提綱挈領的將重點及觀念，以結構化的方式放在每一章節的開始，並於每一章節的精選範例中, 加入重要的題型做整體而詳細的思路分析和講解說明，精編細撰出這本"翻轉微積分"，期能幫助想藉由翻轉學習的同學，在短時間內能對微積分有全盤性的認識及了解，進而讓同學翻轉成績, 翻轉未來。

"翻轉微積分"的所有影音內容均由喻超凡老師親自拍攝講解，放置於喻超凡老師雲端翻轉教室中，免費歡迎同學上網觀看自我學習，網址為 http://www.superyu.idv.tw。本書手稿雖經多次修訂及校對, 但仍難免有所疏漏之處, 敬請各位老師和同學不吝賜教。

喻超凡雲端教室

喻超凡

2015. 2.

目錄

第 1 章 函數的極限與連續

1.1 極限

1.1.1 極限的直覺意義

1. 定義

設函數 $f(x)$ 當 x 趨近 a 時，函數值 $f(x)$ 亦趨近 L，則稱函數 $f(x)$ 在點 a 的極限爲 L, 而表示成 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$。

2. 觀念分析

(1) 兩個實數間，必存在第三個實數，稱爲數的稠密性。

(2) 由稠密性知，數線上某一點 a 的鄰近區域中，包含了無窮多個點。

(3) 極限爲探討數線上某一點 a 鄰近區域中之無限個點函數值分佈的情況。

(i) 極限值爲該無限個點函數值的共同趨勢或一致結論。

(ii) 極限值爲概估值。

(iii) 函數值爲正確值。

(4) 若 $\lim\limits_{\substack{x\to a \\ (x\neq a)}} f(x) = \ell$，若且唯若 $\lim\limits_{\substack{x\to a^+ \\ (x>a)}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to a^- \\ (x<a)}} f(x) = \ell$。

1.1.2 極限的基本定理

設 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$、$\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$ 且 A、$B \in \mathbb{R}$

1. $\lim\limits_{x\to a} k\, f(x) = k \lim\limits_{x\to a} f(x) = kA$； $k \in \mathbb{R}$

2. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)\pm g(x)]=\lim\limits_{x\to a}f(x)\pm\lim\limits_{x\to a}g(x)=A\pm B$

3. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)]=\lim\limits_{x\to a}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to a}g(x)=A\cdot B$

4. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)}=\dfrac{A}{B}$；$(B\neq 0)$

5. $\lim\limits_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{\lim\limits_{x\to a}f(x)}=\sqrt[n]{A}$；$\sqrt[n]{A}\in\mathbb{R}$

6. 設 $f(x)=A$ (常數) , 則 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$

1.1.3 運算子 ∞

1. 基本運算

(1) $c\in\mathbb{R}\ \Rightarrow\ \infty\pm c=\infty$

(2) $\infty+\infty=\infty$

(3) $c>0\ \Rightarrow\ \infty\cdot c=\infty$ ； $c<0\ \Rightarrow\ \infty\cdot c=-\infty$ ； $\infty\cdot\infty=\infty$

(4) $c>0\ \Rightarrow\ \infty^c=\infty$ ； $c<0\ \Rightarrow\ \infty^c=0$

(5) $\dfrac{1}{\pm\infty}=0$

(6) $\dfrac{1}{0^+}=+\infty$ ； $\dfrac{1}{0^-}=-\infty$

2. 不定型

(1) $0\cdot\infty=0\cdot\dfrac{1}{0}=\dfrac{0}{0}=\dfrac{1}{\infty}\cdot\infty=\dfrac{\infty}{\infty}$

(2) $\infty-\infty$

(3) $0^0=e^{0\cdot\ln 0^+}=e^{0\cdot(-\infty)}$ ； $\infty^0=e^{0\cdot\ln\infty}=e^{0\cdot\infty}$ ； $1^\infty=e^{\infty\cdot\ln 1}=e^{\infty\cdot 0}$

1.1.4 極限的直覺求法

1. 連續型 (直接代入法)

(1) 多項式：

$$\lim_{x\to b}(a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0)=a_nb^n+a_{n-1}b^{n-1}+\cdots+a_1b+a_0$$

(2) 有理函式：(分母不爲零)

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(a)}{g(a)}\quad;\quad(g(a)\neq 0)$$

2. $\dfrac{0}{0}$ 型

(1) 觀念分析

(i) 分子及分母有一次或一次重因式之公因式，則表該處爲不連續點。

(ii) 約去一次或一次重因式之公因式，則表示將不連續點變成連續點。

(iii) $\forall\ x\neq a$, $f(x)=g(x)$，則 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)$。

(2) 分式型：分子與分母因式分解後，消去公因式，再以代入法求出極限值。

(3) 根式型：有理化後，消去公因式，再以代入法求出極限值。

常用的有理化公式如下：

(i) $\sqrt{a}-\sqrt{b}=\dfrac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

(ii) $\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}=\dfrac{a-b}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}$

(iii) $\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}=\dfrac{a-b}{(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}$

(iv) $a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})$

3. $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型

(1) 分式型與根式型：提出分子與分母最高次因式，再以代入法求出極限值。

(i) 分子最高次因式的次數大於分母，則極限值爲 $\pm\infty$。

(ii) 分子最高次因式的次數等於分母, 則極限值爲分子與分母最高次因式的係數比值

(iii) 分子最高次因式的次數小於分母，則極限值爲 0。

(2) 指數型：同除最大底 (最小底) 之指數函數，再以代入法求出極限值。

4. $\infty - \infty$ 型

(1) 分式型：通分化簡。

(2) 根式型：有理化。

(3) 對數型：合併相同底的項。

精選範例

1. 探討 $f_1(x)=x+2$、$f_2(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$，兩函數於 $x=2$ 之極限。

《解》☞

x	1.9	1.99	1.999	$\cdots 2 \cdots$	2.001	2.01	2.1
$f_1(x)$	3.9	3.99	3.999	$\cdots 4 \cdots$	4.001	4.01	4.1
$f_2(x)$	3.9	3.99	3.999	$\cdots \times \cdots$	4.001	4.01	4.1

因此由定義可得 $\lim\limits_{x\to 2} f_1(x)=4=f_1(2)$ 、 $\lim\limits_{x\to 2} f_2(x)=4\neq f_2(2)$

2. 求下列極限 《台大》

(a) $\lim\limits_{x\to -3}\sqrt{\dfrac{3x^2+1}{x+4}}$　　(b) $\lim\limits_{x\to 8}\sqrt{3x-2+\sqrt{x+1}}$

《提示》➥ 直接代入法

《解》☞

(a) $\lim\limits_{x\to -3}\sqrt{\dfrac{3x^2+1}{x+4}}=\sqrt{\dfrac{27+1}{-3+4}}=\sqrt{28}$

(b) $\lim\limits_{x\to 8}\sqrt{3x-2+\sqrt{x+1}}=\sqrt{24-2+\sqrt{8+1}}=5$

3. 求 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-6}{x^2-4}$ 《東吳》

《提示》 ➥ $\dfrac{0}{0}$ 分式型

《解》 ☞ $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+3)}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+3}{x+2}=\frac{5}{4}$

4. 求 $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{2x^2+5x-7}$ 《逢甲》

《提示》 ➥ $\dfrac{0}{0}$ 分式型

《解》 ☞ $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{2x^2+5x-7}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{(2x+7)(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x+1}{2x+7}=\frac{2}{9}$

5. 求 $\displaystyle\lim_{t\to 2}\frac{\sqrt{1+\sqrt{2+t}}-\sqrt{3}}{t-2}$ 《台大》

《提示》 ➥ $\dfrac{0}{0}$ 根式型

《解》 ☞

$$
\begin{aligned}
\lim_{t\to 2}\frac{\sqrt{1+\sqrt{2+t}}-\sqrt{3}}{t-2} &= \lim_{t\to 2}\frac{(\sqrt{1+\sqrt{2+t}}-\sqrt{3})(\sqrt{1+\sqrt{2+t}}+\sqrt{3})}{(t-2)(\sqrt{1+\sqrt{2+t}}+\sqrt{3})}\\
&= \lim_{t\to 2}\frac{(\sqrt{2+t}-2)}{(t-2)(\sqrt{1+\sqrt{2+t}}+\sqrt{3})}\\
&= \lim_{t\to 2}\frac{(\sqrt{2+t}-2)(\sqrt{2+t}+2)}{(t-2)(\sqrt{1+\sqrt{2+t}}+\sqrt{3})(\sqrt{2+t}+2)}\\
&= \lim_{t\to 2}\frac{t-2}{(t-2)(\sqrt{1+\sqrt{2+t}}+\sqrt{3})(\sqrt{2+t}+2)}\\
&= \lim_{t\to 2}\frac{1}{(\sqrt{1+\sqrt{2+t}}+\sqrt{3})(\sqrt{2+t}+2)}\\
&= \frac{1}{8\sqrt{3}}
\end{aligned}
$$

6. 求下列極限

(a) $\displaystyle\lim_{t\to 1}\frac{\sqrt{4t+5}-3}{\sqrt{t+3}-2}$ (b) $\displaystyle\lim_{t\to 1}\frac{\sqrt[3]{t}-1}{t-1}$

《提示》 ➥ $\frac{0}{0}$ 根式型

《解》 ☞

(a)

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 1}\frac{\sqrt{4t+5}-3}{\sqrt{t+3}-2} &= \lim_{t\to 1}\frac{\sqrt{4t+5}-3}{\sqrt{t+3}-2}\cdot\frac{\sqrt{4t+5}+3}{\sqrt{4t+5}+3}\cdot\frac{\sqrt{t+3}+2}{\sqrt{t+3}+2}\\ &= \lim_{t\to 1}\frac{4(t-1)(\sqrt{t+3}+2)}{(t-1)(\sqrt{4t+5}+3)}\\ &= \lim_{t\to 1}\frac{4(\sqrt{t+3}+2)}{\sqrt{4t+5}+3}=\frac{16}{6}=\frac{8}{3}\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 1}\frac{\sqrt[3]{t}-1}{t-1} &= \lim_{t\to 1}\frac{\sqrt[3]{t}-1}{t-1}\cdot\frac{\sqrt[3]{t^2}+\sqrt[3]{t}+1}{\sqrt[3]{t^2}+\sqrt[3]{t}+1}\\ &= \lim_{t\to 1}\frac{t-1}{(t-1)(\sqrt[3]{t^2}+\sqrt[3]{t}+1)}\\ &= \lim_{t\to 1}\frac{1}{\sqrt[3]{t^2}+\sqrt[3]{t}+1}\\ &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

7. 求 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+3x}-\sqrt{1-2x}}{x+x^2}$

《提示》 ➥ $\frac{0}{0}$ 根式型

《解》 ☞

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+3x}-\sqrt{1-2x}}{x+x^2}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{x\to 0}\left\{\frac{\sqrt[3]{1+3x}-1}{x(1+x)} - \frac{\sqrt{1-2x}-1}{x(1+x)}\right\} \\
&= \lim_{x\to 0}\left\{\frac{(\sqrt[3]{1+3x}-1)(\sqrt[3]{(1+3x)^2}+\sqrt[3]{1+3x}+1)}{x(1+x)(\sqrt[3]{(1+3x)^2}+\sqrt[3]{1+3x}+1)}\right. \\
&\qquad \left. - \frac{(\sqrt{1-2x}-1)(\sqrt{1-2x}+1)}{x(1+x)(\sqrt{1-2x}+1)}\right\} \\
&= \lim_{x\to 0}\left\{\frac{1+3x-1}{x(1+x)(\sqrt[3]{(1+3x)^2}+\sqrt[3]{1+3x}+1)} - \frac{1-2x-1}{x(1+x)(\sqrt{1-2x}+1)}\right\} \\
&= \lim_{x\to 0}\left\{\frac{3}{(1+x)(\sqrt[3]{(1+3x)^2}+\sqrt[3]{1+3x}+1)} - \frac{-2}{(1+x)(\sqrt{1-2x}+1)}\right\} \\
&= \frac{3}{3} - (-\frac{2}{2}) = 2
\end{aligned}
$$

8. 求下列極限

(a) $\displaystyle \lim_{t\to 2}\frac{\sqrt{t+7}-3}{\sqrt{t+2}-2}$

(b) $\displaystyle \lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{t^3+1}-\sqrt{t^2+1}}{t}$

(c) $\displaystyle \lim_{t\to 0}\frac{\sqrt[3]{8+t+t^3}-\sqrt[3]{8+t}}{\sqrt[3]{8+t}-\sqrt[3]{8+t^3}}$

(d) $\displaystyle \lim_{t\to 27}\frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{t}}-2}{t-27}$

《提示》 ➥ $\frac{0}{0}$ 根式型

《解》 ☞

(a)

$$
\begin{aligned}
\lim_{t\to 2}\frac{\sqrt{t+7}-3}{\sqrt{t+2}-2} &= \lim_{t\to 2}\frac{(\sqrt{t+7}-3)(\sqrt{t+7}+3)(\sqrt{t+2}+2)}{(\sqrt{t+2}-2)(\sqrt{t+7}+3)(\sqrt{t+2}+2)} \\
&= \lim_{t\to 2}\frac{(t-2)(\sqrt{t+2}+2)}{(t-2)(\sqrt{t+7}+3)} \\
&= \lim_{t\to 2}\frac{\sqrt{t+2}+2}{\sqrt{t+7}+3} \\
&= \frac{2}{3}
\end{aligned}
$$

(b) $\displaystyle \lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{t^3+1}-\sqrt{t^2+1}}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{t(t^2-t)}{t(\sqrt{t^3+1}+\sqrt{t^2+1})} = \frac{0}{2} = 0$

(c) $\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt[3]{8+t+t^3}-\sqrt[3]{8+t}}{\sqrt[3]{8+t}-\sqrt[3]{8+t^3}}$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{(\sqrt[3]{8+t+t^3}-\sqrt[3]{8+t})(\sqrt[3]{(8+t)^2}+\sqrt[3]{(8+t)(8+t^3)}+\sqrt[3]{(8+t^3)^2})}{(\sqrt[3]{8+t}-\sqrt[3]{8+t^3})(\sqrt[3]{(8+t)^2}+\sqrt[3]{(8+t)(8+t^3)}+\sqrt[3]{(8+t^3)^2})}$$

$$\cdot\frac{(\sqrt[3]{(8+t+t^3)^2}+\sqrt[3]{(8+t+t^3)(8+t)}+\sqrt[3]{(8+t)^2})}{(\sqrt[3]{(8+t+t^3)^2}+\sqrt[3]{(8+t+t^3)(8+t)}+\sqrt[3]{(8+t)^2})}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{t^3(\sqrt[3]{(8+t)^2}+\sqrt[3]{(8+t)(8+t^3)}+\sqrt[3]{(8+t^3)^2})}{t(1-t)(1+t)(\sqrt[3]{(8+t+t^3)^2}+\sqrt[3]{(8+t+t^3)(8+t)}+\sqrt[3]{(8+t)^2})}$$

$$=0$$

(d)

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 27}\frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{t}}-2}{t-27} &= \lim_{t\to 27}\frac{(\sqrt[3]{t}-3)(\sqrt[3]{t^2}+3\sqrt[3]{t}+9)}{(t-27)(\sqrt{1+\sqrt[3]{t}}+2)(\sqrt[3]{t^2}+3\sqrt[3]{t}+9)}\\ &= \lim_{t\to 27}\frac{t-27}{(t-27)(\sqrt{1+\sqrt[3]{t}}+2)(\sqrt[3]{t^2}+3\sqrt[3]{t}+9)}\\ &= \frac{1}{108}\end{aligned}$$

9. $\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+n+1}{4n^2}$ 《淡大》

《提示》 ➥ $\frac{\infty}{\infty}$ 分式型

《解》 ☞ $\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+n+1}{4n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\{3+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\}}{4n^2}=\frac{3}{4}$

10. $\lim_{x\to -\infty}\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{3x+1}$

《提示》 ➥ $\frac{\infty}{\infty}$ 根式型

《解》☞ 令 $x=-u$, 故

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{3x+1}=\lim_{u\to\infty}\frac{-u+\sqrt{u^2+1}}{-3u+1}=\lim_{u\to\infty}\frac{-1+\sqrt{1+\dfrac{1}{u^2}}}{-3+\dfrac{1}{u}}=0$$

11. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^3+x+4}}{1+x}$ 《中興》

《提示》➥ $\dfrac{\infty}{\infty}$ 根式型

《解》☞ $$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^3+x+4}}{1+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{1+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{4}{x^3}}}{\dfrac{1}{x}+1}=1$$

12. 求下列極限：

(a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{3^x-4^x}{3^x+4^x}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{3^x-4^x}{3^x+4^x}$

《提示》➥ $\dfrac{\infty}{\infty}$ 指數型

《解》☞

(a) $$\lim_{x\to\infty}\frac{3^x-4^x}{3^x+4^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(\dfrac{3}{4})^x-1}{(\dfrac{3}{4})^x+1}=\frac{0-1}{0+1}=-1$$

(b) $$\lim_{x\to-\infty}\frac{3^x-4^x}{3^x+4^x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1-(\dfrac{4}{3})^x}{1+(\dfrac{4}{3})^x}=\frac{1-0}{1+0}=1$$

13. 求 $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1+2^{\frac{1}{x}}}{3-2^{\frac{1}{x}}}$

《提示》 ➥ $\dfrac{\infty}{\infty}$ 指數型

《解》 ☞ 因

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1+2^{\frac{1}{x}}}{3-2^{\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\dfrac{1}{2^{\frac{1}{x}}}+1}{\dfrac{3}{2^{\frac{1}{x}}}-1}=-1$$

且

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{1+2^{\frac{1}{x}}}{3-2^{\frac{1}{x}}}=\frac{1}{3}$$

故

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1+2^{\frac{1}{x}}}{3-2^{\frac{1}{x}}}\neq\lim_{x\to 0^-}\frac{1+2^{\frac{1}{x}}}{3-2^{\frac{1}{x}}}$$

因此極限不存在。

14. 求 $\lim\limits_{x\to 1}(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x^2-1})$ 《淡大》

《提示》 ➥ $\infty-\infty$ 分式型

《解》 ☞ $\lim\limits_{x\to 1}(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x^2-1})=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+1-2}{(x+1)(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{1}{2}$

15. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x})$ 《台大》

《提示》 ➥ $\infty-\infty$ 根式型

《解》 ☞

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x})\\=&\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x})(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x})}{(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x})}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x\sqrt{x}}}}+1} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

16. 求 $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x}(\sqrt{x+2}-\sqrt{x})$ 《成大》

《提示》 ➥ $\infty-\infty$ 根式型

《解》 ☞

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \sqrt{x}(\sqrt{x+2}-\sqrt{x}) &= \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x+2}-\sqrt{x})(\sqrt{x+2}+\sqrt{x})}{(\sqrt{x+2}+\sqrt{x})} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{2\sqrt{x}}{(\sqrt{x+2}+\sqrt{x})} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1} = 1
\end{aligned}
$$

17. 求下列極限

(a) $\lim\limits_{t\to\infty}(\sqrt{t^2+t+1}-t)$

(b) $\lim\limits_{t\to\infty}(\sqrt{t+\sqrt{t}}-\sqrt{t-\sqrt{t}})$

(c) $\lim\limits_{t\to\infty}\sqrt{t}(\sqrt{t+1}-\sqrt{t-1})$

《提示》 ➥ $\infty-\infty$ 根式型

《解》 ☞

(a) $\displaystyle\lim_{t\to\infty}(\sqrt{t^2+t+1}-t)=\lim_{t\to\infty}\frac{t+1}{\sqrt{t^2+t+1}+t}=\lim_{t\to\infty}\frac{1+\frac{1}{t}}{\sqrt{1+\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}}+1}=\frac{1}{2}$

(b)

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\to+\infty}(\sqrt{t+\sqrt{t}}-\sqrt{t-\sqrt{t}})\frac{\sqrt{t+\sqrt{t}}+\sqrt{t-\sqrt{t}}}{\sqrt{t+\sqrt{t}}+\sqrt{t-\sqrt{t}}}\\
&=\lim_{t\to+\infty}\frac{t+\sqrt{t}-t+\sqrt{t}}{\sqrt{t+\sqrt{t}}+\sqrt{t-\sqrt{t}}}\\
&=\lim_{t\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{t}}}+\sqrt{1-\sqrt{\frac{1}{t}}}}=1
\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty}\sqrt{t}(\sqrt{t+1}-\sqrt{t-1}) &= \lim_{t\to\infty}\sqrt{t}(\sqrt{t+1}-\sqrt{t-1})\frac{\sqrt{t+1}+\sqrt{t-1}}{\sqrt{t+1}+\sqrt{t-1}}\\
&= \lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{t}(t+1-t+1)}{\sqrt{t+1}+\sqrt{t-1}}\\
&= \lim_{t\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{t}}+\sqrt{1-\frac{1}{t}}}\\
&= 1
\end{aligned}$$

18. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}[\ln x-\ln(x+1)]$

《提示》 ➥ $\infty-\infty$ 對數型

《解》 ☞ $\displaystyle\lim_{x\to\infty}[\ln x-\ln(x+1)]=\lim_{x\to\infty}\ln(\frac{x}{x+1})=\ln 1=0$

挑戰範例

1. 設 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 滿足

(a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}=2$ (b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{x-2}=3$

試求 a、b、c、d。

《提示》 ➥ 1. 明顯條件：(a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}=2$ ， (b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{x-2}=3$

2. 暗示條件：(a) $f(1)=0$ ， (b) $f(2)=0$

《解》 ☞

(a) 由暗示條件可令

$$f(x)=(x-1)(x-2)(\alpha x+\beta)$$

(b) 由明顯條件可知

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x-2)(\alpha x+\beta)=-\alpha-\beta=2$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x-1)(\alpha x+\beta)=2\alpha+\beta=3$$

解上式可得 $\alpha=5$、$\beta=-7$，故

$$f(x)=(x-1)(x-2)(5x-7)=5x^3-22x^2+31x-14$$

2. 試求滿足下列二條件的最低次多項式 $f(x)$

(a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)-x^4}{x^2}=2$ (b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}=1$

《提示》 ➥ 1. 明顯條件：(a) $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-x^4}{x^2}=2$ ， (b) $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=1$

2. 暗示條件：(a) $\deg\{f(x)\}=4$ ， (b) $f(1)=0$

《解》 ☞

(a) 由暗示條件可知 $\deg\{f(x)\}=4$，且缺 x^3 項，及 $f(1)=0$，故可令

$$f(x)=(x-1)(x^3+x^2+\alpha x+\beta)$$

(b) 由明顯條知

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-x^4}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{(\alpha-1)x^2+(\beta-\alpha)x-\beta}{x^2}=\alpha-1=2$$

故 $\alpha=3$，再由

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x^3+x^2+\alpha x+\beta)=1+1+\alpha+\beta=1$$

故 $\beta=-4$，因此

$$f(x)=(x-1)(x^3+x^2+3x-4)=x^4+2x^2-7x+4$$

3. 若 $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+4x+1}-(ax+1)}{x^2}=b$，則 a、b 爲何？

《解》 ☞ 因

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+4x+1}-(ax+1)}{x^2}=b$$

有理化分子可得

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1-a^2)x^2+(4-2a)x}{x^2(\sqrt{x^2+4x+1}+ax+1)}=b$$

故可得 $4-2a=0$，則 $a=2$，代回上式可得

$$\lim_{x\to 0}\frac{-3}{\sqrt{x^2+4x+1}+2x+1}=b$$

則 $b=-\frac{3}{2}$