翻轉微積分下册

勘誤檔案

喻超凡　喻超弘編著

喻超凡數位企業有限公司

(2) $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx = f(c)\int_a^b 1\,dx \quad ; \quad c \in (a\,,\,b)$

(3) $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\ dx = f(c)\int_a^b g(x)\ dx\ ;\ c \in (a\,,\,b)$, $\boxed{\text{且 } g : [a,b] \to \mathbb{R} \text{ 不改變符號 。}}$

4.1.3 微積分基本定理

1. 微積分基本定理 (Fundamental Theorem of the Calculus)

設 f 在 $[a\,,\,b]$ 上爲連續

(1) 若 $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$, $\forall\, x \in [a\,,\,b]$, 則 $F'(x) = f(x)$, $\forall\, x \in (a\,,\,b)$

(2) 若 $G(x)$ 爲 $f(x)$ 之反導數 , 則

$$\int_a^b f(x)\ dx = G(b) - G(a) = G(x)\Big|_a^b$$

2. 微積分基本定理推廣

(1) 若 $F(x) = \displaystyle\int_a^{u(x)} f(t)\ dt$, 則

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^{u(x)} f(t)\ dt = \frac{d}{du}\{\int_a^u f(t)\ dt\}\cdot\frac{du}{dx} = f(u(x))\,u'(x)$$

(2) 若 $F(x) = \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\ dt$, 則

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{d}{dx}\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\ dt \\ &= \frac{d}{dx}\Big\{\int_a^{v(x)} f(t)\ dt - \int_a^{u(x)} f(t)\ dt\Big\} \\ &= f(v(x))\cdot v'(x) - f(u(x))\cdot u'(x) \end{aligned}$$

4.3.2 瑕積分的斂散性

1. 比較審斂法 (Comparison Test)

(1) 第一型瑕積分

(a) 設 $0 \le f(x) \le g(x)$，$\forall\, x \ge a$，若 $\displaystyle\int_a^{\infty} g(x)\,dx$ 收斂，則 $\displaystyle\int_a^{\infty} f(x)dx$ 亦收斂。

(b) 設 $f(x) \ge g(x) \ge 0$，$\forall\, x \ge a$，若 $\displaystyle\int_a^{\infty} g(x)\,dx$ 發散，則 $\displaystyle\int_k^{\infty} f(x)\,dx$ 亦發散。

(2) 第二類型積分 $\displaystyle\lim_{x\to a^+} f(x) = \infty$，$\displaystyle\lim_{x\to b^-} f(x) = \infty$

(a) 設 $0 \le f(x) \le g(x)$，$\forall\, x \in (a\,,\,b)$，若 $\displaystyle\int_a^{b} g(x)\,dx$ 收斂，則 $\displaystyle\int_a^{b} f(x)\,dx$ 亦收斂。

(b) 設 $f(x) \ge g(x) \ge 0$，$\forall\, x \in (a\,,\,b)$，若 $\displaystyle\int_a^{b} g(x)\,dx$ 發散，則 $\displaystyle\int_a^{b} f(x)\,dx$ 亦發散。

2. 商數審斂法 (Quotient Test or Limit Comparison Test) ($\displaystyle\lim_{x\to \text{瑕疵點}} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$)

(1) 第一型瑕積分，且 $f(x)$、$g(x) \ge 0$，令 $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$

(a) $\ell > 0$，則 $\displaystyle\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ 與 $\displaystyle\int_a^{\infty} g(x)\,dx$ 具有相同的斂散性。

(b) $\ell = 0$，若 $\displaystyle\int_a^{\infty} g(x)\,dx$ 收斂，則 $\displaystyle\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ 亦收斂。

(c) $\ell = \infty$，若 $\displaystyle\int_a^{\infty} g(x)\,dx$ 發散，則 $\displaystyle\int_a^{\infty} f(x)dx$ 亦發散。

(2) 第二型瑕積分 $\displaystyle\lim_{x\to a^+} f(x) = \infty$、$\displaystyle\lim_{x\to b^-} f(x) = \infty$

若 $\displaystyle\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$ 或 $\displaystyle\lim_{x\to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$

(a) $\ell > 0$，則 $\displaystyle\int_a^{b} f(x)\,dx$ 與 $\displaystyle\int_a^{b} g(x)\,dx$ 具有相同的斂散性。

(b) $\ell = 0$，若 $\displaystyle\int_a^{b} g(x)\,dx$ 收斂，則 $\displaystyle\int_a^{b} f(x)\,dx$ 亦收斂。

(c) $\ell = \infty$，若 $\displaystyle\int_a^{b} g(x)\,dx$ 發散，則 $\displaystyle\int_a^{b} f(x)\,dx$ 亦發散。

《解》☞ 因 $\dfrac{dx}{dt} = \cos t$ 、$\dfrac{dy}{dt} \boxed{= -\sin t\ ,}$ 故

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2}\ dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t}\ dt \\ &= \int_0^{2\pi} dt = t\ \Big|_0^{2\pi} = 2\pi \end{aligned}$$

17. 求下列曲線之弧長

(a) $r = 1 - \cos\theta$，$0 \leq \theta < 2\pi$

(b) $r = a(1 + \cos\theta)$，$(a > 0)$

(c) $r = e^{\theta}$，$(0 \leq \theta \leq \pi)$

(d) $r = a\sin^3\dfrac{\theta}{3}$，$(a > 0)$

《解》☞

(a) 因 $r = 1 - \cos\theta$，故 $\dfrac{dr}{d\theta} = \sin\theta$，則

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 + (\frac{dr}{d\theta})^2}\ d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{(1 - \cos\theta)^2 + \sin^2\theta}\ d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{2(1 - \cos\theta)}\ d\theta = \int_0^{2\pi} 2\Big|\sin\frac{\theta}{2}\Big|\ d\theta = 2\int_0^{2\pi} \sin\frac{\theta}{2} d\theta \\ &= -4\cos\frac{\theta}{2}\ \Big|_0^{2\pi} = 4 + 4 = 8 \end{aligned}$$

(b) 因 $r = a(1 + \cos\theta)$，故 $\dfrac{dr}{d\theta} = -a\sin\theta$，則

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 + (\frac{dr}{d\theta})^2}\ d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1 + \cos\theta)^2 + a^2\sin^2\theta}\ d\theta \\ &= a\int_0^{2\pi} \sqrt{2(1 + \cos\theta)}\ d\theta = a\int_0^{2\pi} 2\Big|\cos\frac{\theta}{2}\Big|\ d\theta \\ &= 2a\Big\{\int_0^{\pi} \cos\frac{\theta}{2}\ d\theta + \int_{\pi}^{2\pi} -\cos\frac{\theta}{2}\ d\theta\ \Big\} \\ &= 2a\Big\{2\sin\frac{\theta}{2}\Big|_0^{\pi} - 2\sin\frac{\theta}{2}\Big|_{\pi}^{2\pi}\ \Big\} \\ &= 2a(2 + 2) = 8a \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\int_1^2 \sqrt{r^2 - 2 + \frac{1}{r^2} + 4}\ dr = \frac{1}{2}\int_1^2 (r + \frac{1}{r})\ dr \\
&= \frac{1}{2}(\frac{r^2}{2} + \ln r)\Big|_1^2 = \frac{1}{2}\{2 + \ln 2 - (\frac{1}{2} + \ln 1)\} \\
&= \frac{3}{4} + \frac{1}{2}\ln 2
\end{aligned}
$$

19. 設 $y = f(x)$ 從 0 到 x 的弧長爲 $S = e^x - f(x)$，且 $f(0) = 1$，求 $f(x)$。 《淡大》

《解》 ☞ 因

$$S = \int_0^x \sqrt{1 + [f'(t)]^2}\ dt = e^x - f(x)$$

上式兩邊對 x 微分可得

$$\sqrt{1 + [f'(x)]^2} = e^x - f'(x)$$

故

$$1 + [f'(x)]^2 = e^{2x} - 2e^x \cdot f'(x) + [f'(x)]^2$$

即

$$f'(x) = \frac{e^{2x} - 1}{2e^x} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x$$

對上式取 x 積分，可得

$$f(x) = \cosh x + c$$

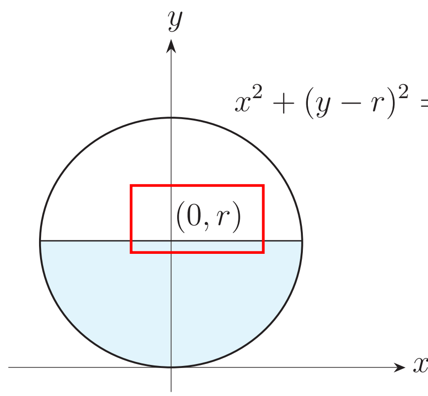
又 $f(0) = 1 = 1 + c$，故 $c = 0$，則 $f(x) = \cosh x$。

20. 試求 $x^2 + y^2 = r^2$，($y > 0$) 上半圓弧的曲線 S 的形心。

《解》 ☞ 因 $y = \sqrt{r^2 - x^2}$，故 $y' = -\dfrac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$，則

$$M_y = \int_{-r}^{r} x\sqrt{1 + (y')^2}\ dx = \int_{-r}^{r} x\sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}}\ dx = 0$$

4. 求半徑爲 r 的半圓繞與直徑平行且相切於該半圓的直線 L 的旋轉體積。 《文化》



《解》 ☞ 設圓的方程式爲 $x^2+(y-r)^2=r^2$，故 $y=r\pm\sqrt{r^2-x^2}$，下半圓的方程式爲

$$y=r-\sqrt{r^2-x^2}$$

$$\begin{aligned}
V &= \int_{-r}^{r}\pi\{r^2-(r-\sqrt{r^2-x^2})^2\}\,dx\\
&= 2\pi\int_0^r\{r^2-(r^2-2r\sqrt{r^2-x^2}+r^2-x^2)\}\,dx\\
&= 2\pi\int_0^r(2r\sqrt{r^2-x^2}-r^2+x^2)\,dx\\
&= 2\pi\left\{2r\int_0^r\sqrt{r^2-x^2}\,dx+(-r^2x+\frac{1}{3}x^3)\Big|_0^r\right\}\\
&= 2\pi\left\{2r\cdot\frac{1}{4}\pi r^2+(-r^3+\frac{1}{3}r^3)\right\}\\
&= \pi^2r^3-\frac{4}{3}\pi r^3
\end{aligned}$$

5. 試求函數 $f(x)=e^{-x^2}$ 之圖形與 x 軸所圍區域繞 y 軸迴轉所得立體 S 之體積。

《成大》

(2) 商數審斂法 $\boxed{\text{(Quotient Test or Limit Comparison Test)}}$：設 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\ell$，則

(a) $\ell>0$ ($\forall\, n\geq k \;\Rightarrow\; a_n=\ell b_n$)，則 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 與 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 具有相同的斂散性。

(b) $\ell=0$ ($\forall\, n\geq k \;\Rightarrow\; a_n\leq b_n$)，若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收斂，則 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 亦收斂。

(c) $\ell=\infty$ ($\forall\, n\geq k \;\Rightarrow\; a_n\geq b_n$)，若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 發散，則 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 亦發散。

(3) 比值審斂法 (D'Alembert Ratio Test)：設 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\ell$

(a) $\ell<1$，則 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 爲收斂。

(b) $\ell>1$，則 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 爲發散。

(c) $\ell=1$，則 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 判別失敗。

(4) 根値審斂法 (Cauchy Root Test)：設 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\ell$

(a) $\ell<1$，則 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 爲收斂。

(b) $\ell>1$，則 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 爲發散。

(c) $\ell=1$，則 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 判別失敗。

(5) Raabe's 審斂法：設 $\lim\limits_{n\to\infty}n\,(1-\dfrac{a_{n+1}}{a_n})=\ell$

(a) $\ell>1$，則 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 爲收斂。

(b) $\ell<1$，則 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 爲發散。

(c) $\ell=1$，則 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 判別失敗。

5.2 冪級數

5.2.1 定義

1. 函數級數：

設有一數列爲 $< u_n(x) >$ 且 $\forall x \in (a\,,\,b)$，則函數級數定義成

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots$$

當 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) = S(x)$ 時，則稱級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 爲收斂級數。

2. 冪級數：

形式如

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \cdots + a_n(x-c)^n + \cdots \ ; \ \forall\, x \in (a\,,\,b)$$

的級數，稱爲冪級數。

5.2.2 均勻收斂

1. 定義：

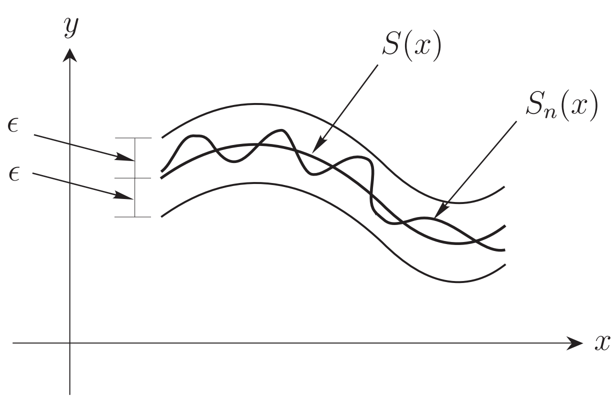


Figure 5.2: 均勻收斂

設函數級數爲 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$，當 $x \in I$ 時級數收斂，即其所對應的部分和數列 $< S_n(x) >$，滿足 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = S(x)$，由極限的定義可知

$$\forall \epsilon > 0\ ,\ \exists M > 0\ ,\ \ni n > M \ \Rightarrow\ |S_n(x) - S(x)| < \epsilon$$

若 M 與 x 無關，僅與 ϵ 有關時，則稱函數級數爲均勻收斂。

《解》 ☞

(1) 由比值審斂法知

$$
\begin{aligned}
& \lim_{n\to\infty}\left|\frac{[(n+1)!]^3(2x-1)^{3n+3}}{(3n+3)!}\cdot\frac{(3n)!}{(n!)^3(2x-1)^{3n}}\right| \\
= & \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3|2x-1|^3}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)} \\
= & \frac{|2x-1|^3}{27}<1
\end{aligned}
$$

即 $|2x-1|^3<27$，則 $|2x-1|<3$，或 $\left|x-\dfrac{1}{2}\right|<\dfrac{3}{2}$ 時級數收斂，故收斂半徑爲 $\dfrac{3}{2}$。

(2) 由根式審斂法知

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{x^{2n}}{n^n}\right|}=\lim_{n\to\infty}\frac{x^2}{n}=0<1$$

對 $x\in\mathbb{R}$ 皆成立，故收斂半徑爲 ∞。

5. Evaluate the interval of convergence of $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k\dfrac{(x+2)^k}{k+1}$ 《中興》

《解》 ☞ 由比值審斂法知

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{\dfrac{(x+2)^{k+1}}{k+2}}{\dfrac{(x+2)^k}{k+1}}\right|=|x+2|<1$$

即 $-1<x+2<1$，或 $-3<x<-1$ 時級數收斂。

(1) 將 $x=-3$ 代回原級數中，可得

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(-1)^k}{k+1}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k+1}$$

爲發散。

(2) 將 $x=-1$ 代回原級數中，可得

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(+1)^k}{k+1}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k+1}$$

爲收斂。

(3) 故級數的收斂區間爲 $(-3, -1]$

6. Evaluate the interval of convergence of $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{k(k+1)}$ 《交大》

《解》 ☞ 由比值審斂法知

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{\frac{x^{k+2}}{(k+1)\cdot(k+2)}}{\frac{x^{k+1}}{k\cdot(k+1)}}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{k}{k+2}\cdot x\right| = |x| < 1$$

即 $-1 < x < 1$ 時級數收斂。

(1) 將 $x = 1$ 代回原級數，可得 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$，爲收斂級數。

(2) 將 $x = -1$ 代回原級數，可得 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k(k+1)}$，爲收斂級數。

(3) 故級數的收斂區間爲 $[-1, 1]$

7. 求下列各級數之收斂區間及半徑

(1) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$ (2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$

《解》 ☞

(1) 由比值審斂法知

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+2}}{n+2}\cdot\frac{n+1}{x^{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{n+2}\right||x| = |x| < 1$$

即 $-1 < x < 1$ 級數收斂，則級數的半徑爲 1。

(a) 將 $x = 1$ 代回原級數，可得 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$ 爲收斂級數。

《証》☞

(1)

$$f_x(0\,,\,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h\,,\,0)-f(0\,,\,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h}=0$$

$$f_y(0\,,\,0)=\lim_{k\to 0}\frac{f(0\,,\,k)-f(0\,,\,0)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{0-0}{k}=0$$

故 $f(x\,,\,y)$ 於 $(0\,,\,0)$ 處對 x 及 y 之偏導數存在。

(2) 因

$$\begin{aligned}\Delta f-df &= \{f(0+h\,,\,0+k)-f(0\,,\,0)\}-\{f_x(0\,,\,0)\cdot h+f_y(0\,,\,0)\cdot k\}\\ &= (\frac{hk}{h^2+k^2}-0)-(0\cdot h+0\cdot k)\\ &= \frac{hk}{h^2+k^2}=\epsilon\,\sqrt{h^2+k^2}\end{aligned}$$

比較可得 $\epsilon=\dfrac{hk}{(h^2+k^2)^{3/2}}$，又

$$\begin{aligned}\lim_{(h,k)\to(0,0)}\epsilon &= \lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{hk}{(h^2+k^2)^{3/2}} \quad (\text{ 取路徑 } k=h\text{ })\\ &= \lim_{\substack{(h,k)\to(0,0)\\ \text{沿 } k=h}}\frac{hk}{(h^2+k^2)^{3/2}}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{h^2}{(2h^2)^{3/2}}=\lim_{h\to 0}\boxed{\frac{h^2}{2\sqrt{2}\,|h|^3}}\\ &= \text{不存在}\end{aligned}$$

故 $f(x\,,\,y)$ 於 $(0\,,\,0)$ 不可微。